Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Diciembre 2003

Problema 1 *(4 puntos)*Se considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & my+ & z = & 2 \\ mx+ & & 2z = & 4 \\ x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

1. Hállense los valores de m para los que sea compatible.
2. Resolver el sistema para $m = 2$, si es posible.

Solución

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = m^2 - 3m + 2 = 0 \Longrightarrow m = 2, \;\; m = 1$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango($A$) =Rango($\overline{A}$) $= 3 =$ nº de incógnitas, por lo que el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ buscamos un menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Luego el Rango(A) $= 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y observamos que tiene dos filas iguales, luego el rango tiene que ser menor de tres, es decir, tiene que ser necesariamente dos.

Tenemos, por tanto, Rango(A) $= 2 =$Rango($\overline{A}$) $<$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ buscamos un menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ Luego el Rango$(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$

Observamos que la primera y la tercera columna son iguales, y además la cuarta es el doble de ellas . Necesariamenete el rango tiene que ser dos.

En este caso tenemos que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$n^o de incógnitas, luego se trata de un sistema Compatible Indeterminado.

2. Cuando $m = 2$, observando el menor elegido anteriormente, podemos eliminar la última fila, por lo que tendremos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 2z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*Una empresa fabrica dos tipos de modelos de fundas de sofá, A y B, que dejan unos beneficios de 40 y 20 unidades monetarias respectivamente. Para cada funda del modelo A se precisan 4 horas de trabajo y 3 unidades de tela. Para fabricar una del modelo B se requieren 3 horas de trabajo y 5 unidades de tela. La empresa dispone de 48 horas de trabajo y 60 unidades de tela. Si a lo sumo pueden hacerse 9 fundas del modelo A, ¿cuántas fundas de cada modelo han de fabricarse para que el beneficio sea máximo?.

1. Plantear el problema.

2. Resolución gráfica.

3. Analizar gráficmente qué ocurre al disminuir las horas de trabajo disponibles.

Solución:

1.

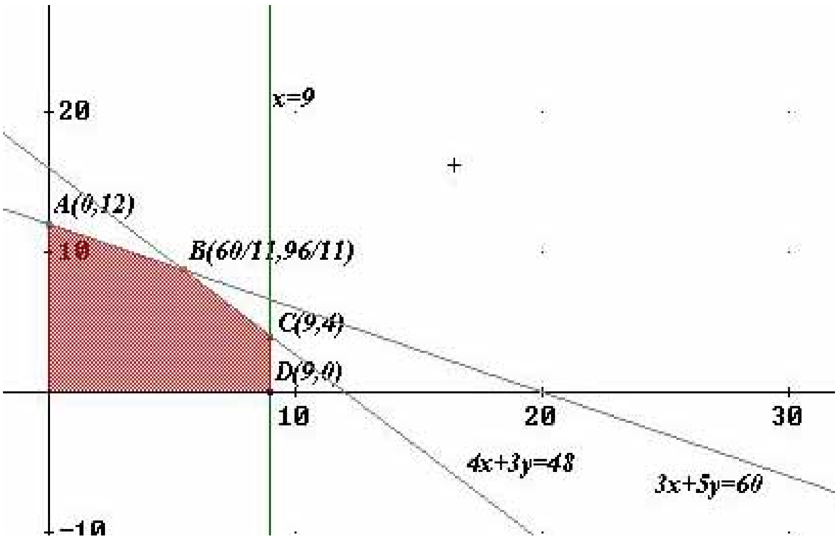
modelo	horas	tela
A	4	3
B	3	5
Total	48	60

Si llamamos x al nº de fundas del modelo A e y al nº de fundas del modelo B, el problema será el siguiente:

Calcular el Máximo$F(x, y) = 40x + 20y$, sujeto a:

$4x + 3y \leq 48$
$3x + 5y \leq 60$
$x \leq 9$
$x \geq 0,\ \ y \geq 0$

2. Buscamos los puntos de corte:
$A(0, 12)$
B es la intersección $\begin{cases} 3x + 5y = 60 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases} \Longrightarrow B\left(\dfrac{60}{11}, \dfrac{96}{11}\right)$
C es la intersección $\begin{cases} 4x + 3y = 48 \\ x = 9 \end{cases} \Longrightarrow C(9, 4)$
$D(9, 0)$



La función beneficio tiene que ser máxima en uno de estos vértices:

$F(A) = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 12 = 240$

$F(B) = 40 \cdot \dfrac{60}{11} + 20 \cdot \dfrac{96}{11} = \dfrac{4320}{11}$

$F(C) = 40 \cdot 9 + 20 \cdot 4 = 440$

$F(D) = 40 \cdot 9 + 20 \cdot 0 = 360$

Luego para que el beneficio sea máximo hay que fabricar 9 fundas del modelo A y 4 del B.

3. Si disminuimos las horas de trabajo la recta $4x + 3y = 48$ se traslada hacia la izquierda, y van disminuyendo el número de fundas de sofá que se pueden fabricar, el punto C tiende a juntarse al punto B y, por tanto, disminuyen los beneficios.

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular:

1. $A^2 - 2A - 8I$.
2. X tal que $AX = I$, (I es la matriz identidad 3×3).

Solución:

1.

$$A^2 - 2A - 8I = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Como $|A| = 16 \neq 0$ podemos calcular A^{-1} y tendremos:

$$AX = I \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}I = A^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}$$

$$X = A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$