Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato
Diciembre 2003

Problema 1 Analizar la compatibilidad del sistema de ecuacuiones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az = & 1 \\ 2x- & y+ & z = & 1 \\ 3x+ & ay+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

y resolverlo en el caso de que tenga infinitas soluciones. **Solución**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A| = 2a(a+1)$, y si hacemos $|A| = 0$ obtenemos los valores $a = -1$ y $a = 0$, que serán los únicos valores que anulan el determinate de A.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = -1$, como $|A| = 0$ buscamos menores de orden 2, y nos encotramos

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

Y por otra parte si

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Buscamos menores de orden 3 y encontramos

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Luego si $a = -1 \Longrightarrow$Rango(A) $\neq$Rango$\overline{A} \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

Si $a = 0$, como $|A| = 0$ buscamos menores de orden 2, y nos encotramos

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

Y por otra parte si

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Buscamos menores de orden 3 que sean distintos de cero y comprobamos que

$$|A_1| = |A| = 0, \ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

No hay menores de orden 3 distintos de cero, y si buscamos de orden 2 tenemos el mismo que encontramos anteriormente para A, y el Rango$(\overline{A}) = 2$.

Luego si $a = 0 \Longrightarrow$Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$n$^{\circ}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Ideterminado.

Resolvemos en este caso:

Por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación del sistema y nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & & = & 1 \\ 2x- & y+ & z & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2-\lambda}{3} \\ \\ y = \dfrac{1+\lambda}{3} \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = X - B \Longrightarrow AX - X = -B \Longrightarrow (A - I)X = -B \Longrightarrow$$

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(-B) \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}(-B)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$