Examen de Matemáticas II (Junio 2004)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

1. (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
2. (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0 \\ x- & (1+a)y+ & z=0 \\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

1. (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.
2. (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Problema 4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{array}\right. ;\quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0;\quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

1. (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
2. (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
3. (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

Examen de Matemáticas II (Junio 2004)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 5 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1 punto) Hallar A^{-1}.
2. (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

   $$A \cdot X \cdot A^T = B$$

   (donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Problema 6 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rr} x+ & 2y = 1 \\ 3x- & y = 2 \end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.
2. (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 1 \end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Problema 7 *(3 puntos)*

1. (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

   $$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz = & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z = & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z = & -k \end{array}$$

2. (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Problema 8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

1. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
2. (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
3. (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.