Examen de Matemáticas II (Coordinador 2004)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto). Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2n\left(\frac{3n-1}{3n}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = e^{-2/3}$$

b)

$$F'(x) = \sqrt{5+e^{x^4}}, \quad g'(x) = 2x$$

Por la regla de la cadena:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = 2x\sqrt{5+e^{x^8}}$$

Problema 2 *(2 puntos).* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x^2-x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto). Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

b) (1 punto). Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

www.mysat.net

Solución:

a)

$x^2-x=0 \Longrightarrow x=0,\ x=1 \Longrightarrow \text{Dom}(f)=R-\{1\}$ en $x=0$ $f(0)=a$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{e^x-1}{x^2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{e^x-1}{x^2-x}=-\infty$$

b) En $x=1$ hay una discontinuidad inevitable por el apartado anterior.

En $x=0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x}{2x-1}=-1$$

Para que f sea continua en ese punto $a=-1$.

Problema 3 *(3 puntos).*Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z= & 2 \\ \lambda x+ & y- & z= & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z= & 2\lambda \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2\lambda \end{array}\right),\quad |A|=2(3\lambda^2-11\lambda+8)=0\Longrightarrow \lambda=1,\ \lambda=8/3$$

Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right|=-12\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

www.mat.net

Luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 8/3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 16/3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 16/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8/3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{3} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{vmatrix} = -\frac{268}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Sólo es compatible en los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2\lambda \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 3 & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda + 3)}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = \frac{2\lambda^3 - 7\lambda + 13}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{4\lambda^2 - 9\lambda + 3}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).

www.ruat.net

b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).

c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

Solución:

a) Sea A el punto de corte de r con π:

$$1+t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{2}{a+1} \Longrightarrow A\left(1,-\frac{2}{a+1},-\frac{2}{a+1}\right)$$

Sea A' el punto de corte de r' con π:

$$2+2t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{2}{a+2} \Longrightarrow A'\left(2,-\frac{6}{a+2},-\frac{3}{a+2}\right)$$

Sea A'' el punto de corte de r'' con π:

$$3+3t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{4}{a+3} \Longrightarrow A''\left(3,-\frac{12}{a+3},-\frac{4}{a+3}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'}=\left(1,-\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)},-\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}\right)$$

$$\overrightarrow{A'A''}=\left(1,-\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)},-\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}\right)$$

Para que estén alineados los tres puntos:

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'A''} \Longrightarrow \frac{4a+2}{(a+1)(a+2)}=\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)} \Longrightarrow \quad a=0 \quad a=1$$

Si $a=0$:

$$\overrightarrow{AA'}=(1,-1,1/2)\neq\overrightarrow{A'A''}=(1,-1,-1/6)$$

Esta solución no vale.

$a=1$:

$$\overrightarrow{AA'}=(1,-1,0)=\overrightarrow{A'A''}$$

Luego cuando $a=1$ los tres puntos están alineados.

b) La recta h que une estos puntos:

$$h:\begin{cases}\overrightarrow{u_h}=(1,-1,0)\\ A(1,-1,-1)\end{cases} \Longrightarrow h:\begin{cases}x=1+t\\ y=-1-t\\ z=-1\end{cases}$$

c)

$$d(O,h)=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{u_h}|}{|\overrightarrow{u_h}|}=\frac{|(1,-1,-1)\times(1,-1,0)|}{|(1,-1,0)|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\,u^2$$

www.mysat.net

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2004)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*.seconsideran las rectas

$$r:\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-z+1=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-z+2=0 \\ 2y-mz=6 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

Solución:

a)

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+m\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,2) \\ P_r(0,-2,1) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,m,2) \\ P_s(-1,3,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,5,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -1+m=0 \Longrightarrow m=1$$

Cuando $m=1$ los vectores directores de las rectas r y s coinciden, luego para este valor las rectas son paralelas.

b)

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u}=(1,1,2) \\ \overrightarrow{v}=(-1,5,-1) \\ P(0,-2,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 5 & y+2 \\ 2 & -1 & z-1 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow 11x+y-6z+8=0$$

Problema 2 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases}$$

www.musat.net

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,3) \\ P_r(3,4,5) \end{cases}$$

Un plano perpedicular a esta recta y que contenga al punto P será:

$$\pi : 2x + y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 6 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5$$

$$\pi : 2x + y + 3z - 5 = 0$$

Este plano corta a la recta r en el punto P':

$$2(3 + 2\lambda) + 4 + \lambda + 3(5 + 3\lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{10}{7}$$

$$P'\left(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{P'P} = (3,-1,0) - \left(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{22}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{P'P} = \left(\frac{22}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{5}{7}\right) \\ P(3,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 3 + \dfrac{22}{7}\lambda \\ y = -1 - \dfrac{25}{7}\lambda \\ z = -\dfrac{5}{7}\lambda \end{cases}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera la función :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

c) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

Solución:

a) $1 + \sin^2 x \neq 0$ siempre $\Longrightarrow$ no hay puntos críticos.

La función es par.

www.must.net

b)

$$f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{(1+(\sin^2 x))^2} = 0 \Longrightarrow -2\sin x \cos x = 0$$

$$-2\sin x \cos x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = -\pi, \quad x = \pi \\ \cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \quad x = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

En los puntos de abcisa $x = 0$, $x = -\pi$ y $x = \pi$ la función presenta un Máximo.

En el puntos de abcisa $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y en el punto de abcisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función presenta un Mínimo.

c)

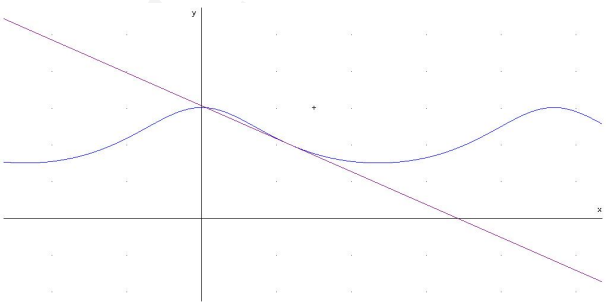
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{9}$$

La ecuación de la recta tangente

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

d) Representación gráfica



Problema 4 *(3 puntos)*.Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto). Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 9a + 14 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = 7$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array}\right| = 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango$(\overline{A}) \neq$ Rango(A)Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{array}\right| = 0, \quad |A_4| = \left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{array}\right| = 0$$

www.musaat.net

Luego Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango(A) <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones.

b) Por el menor elegido cuando $a = 2$ para discutir el Rango(A) podemos decidir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & 2z= & 4 \\ x+ & 2y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 - 7\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

www.musat.net