Examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Selectividad-Opción B (Junio 2004)
Tiempo: 90 minutos

www.musat.net

Problema 1 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in R$$

que satisfacen la ecuación matricial

$$X^2 = 2X$$

Solución:

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + cb & c^2 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

Igualando las expresiones

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 2a \\ ab + cb = 2b \\ c^2 = 2c \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0, \quad a = 2 \\ ab + cb = 2b \\ c = 0, \quad c = 2 \end{array} \right.$$

Tendremos las siguientes posibles soluciones:

- Si $a = 0,\ c = 0 \Longrightarrow 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$, luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $a = 2,\ c = 0 \Longrightarrow b = b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$
- Si $a = 0,\ c = 2 \Longrightarrow b = b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$
- Si $a = 2,\ c = 2 \Longrightarrow 2b + 2b = 2b \Longrightarrow b = 0$, luego $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

1. Determinar su dominio de definición.
2. Obtener sus asíntotas.

Solución:

1. Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Dom f = (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [2,\infty)$

2. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right] = +\infty \Longrightarrow x = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right] = +\infty \Longrightarrow x = -1$$

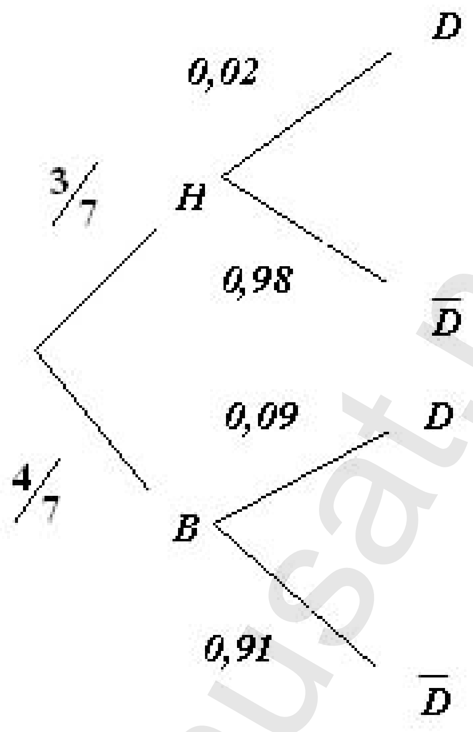
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

Problema 3 *(2 puntos)* En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0,02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0,09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?.

www.musat.net



www.musat.net

Solución:

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|H)P(H) + P(\overline{D}|B)P(B) = \frac{3}{7}\cdot 0,98 + \frac{4}{7}\cdot 0,91 = 0,94$$

$$P(H|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|H)P(H)}{P(\overline{D})} = \frac{0,98\cdot\frac{3}{7}}{0,94} = 0,4468$$

Problema 4 *(2 puntos)* El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son

255 85 120 290 80 80 275 290 135

1. Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.

2. Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99%, el error de estimación del precio no supere los 50 euros

Solución:

$N(\mu, 100)$, normal de media μ y desviación típica $\sigma = 100$, $\overline{x} = 178,89$.

1.

$$1-\alpha = 0,98 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,99 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,32$$

$$I.C. = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(178,89 - 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}; 178,89 + 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}\right) = (101,56; 256,22)$$

2.

$$1-\alpha = 0,99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,56$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 50 = 2,56\frac{100}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2,56 \cdot 100}{50} \Longrightarrow n = 26,2144$$

Luego $n = 27$.

www.musat.net