Examen de Matemáticas II (Junio 2004)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1 punto) Hallar A^{-1}.
2. (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Solución:

1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.

$$AXA^T = B \Longrightarrow A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B(A^T)^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}B(A^T)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rl} x+ & 2y = 1 \\ 3x- & y = 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.
2. (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rrl} 2x+ & 2y- & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Solución:

1. La tercera ecuación debe de ser una combinación lineal de las anteriores, ya que en caso contrario el sistema resultaría incompatible. La suma de las dos puede ser una solución:

$$4x + y = 3$$

2. La tercera ecuación tiene que ser una combinación lineal de las dos anteriores, pues en caso contrario, el sistema resultaría compatible determinado o incompatible. Como el término independiente tiene que ser 1, podemos multiplicar la primera por 2 y le restamos la segunda:

$$3x + 3y - 4z = 1$$

Problema 3 *(3 puntos)*

1. (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz = & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z = & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z = & -k \end{array}$$

2. (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

1. Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -3k^2 - 5k + 2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = \dfrac{1}{3} \\ \\ k = -2 \end{array} \right.$$

Si $k \neq \dfrac{1}{3}$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado$\Longrightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = \dfrac{1}{3}$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 2 & 3 \\ 1 & 1/3 \end{array} \right| = -\frac{7}{3} \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Por otra parte tenemos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{224}{27} \neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. En este caso tenemos que comparar los planos dos a dos:

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1/3} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1} = \dfrac{-1}{-3} \neq \dfrac{-1}{-1/3} \Longrightarrow \text{son paralelos} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Dos planos son paralelos (π_2 y π_3) y otro plano corta a los dos (π_1).

Si $k = -2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(A) = 2$, y si observamos la matriz $\overline{A}$ la tercera fila es la suma de las anteriores y, por tanto, Rango$(\overline{A}) = 2$. Concluimos con que el sistema es Compatible Indeterminado; comparando los planos se compruebo que no hay coincidentes y concluyo con que se cortan los tres en una recta.

2. Puedo definir esta recta como intersección de dos de estos planos r : $\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & 2z = & 3 \\ x- & 2y- & z = & -1 \end{array}\right.$ y su vector director será:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 0, -7)$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

1. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

2. (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

3. (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

1. Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1-a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1-a^2) = -2a(x-a) \Longrightarrow 2ax + y - (1+a^2) = 0$$

2. **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1+a^2 \Longrightarrow A(0, 1+a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1-a^2}{2a} = \dfrac{a^2+1}{2a}$. Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

3.

$$d(A,P) = \sqrt{(a-0)^2 + (1-a^2-(1+a^2))^2} = a\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(B,P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1-a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1-a^2-0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1-a^2)^2}{4a^2} + (1-a^2)^2} = (1-a^2)\sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}} = \frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(A,P) = 2d(B,P) \Longrightarrow a\sqrt{1+4a^2} = 2\frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2} \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1-a^2}{a} \Longrightarrow a^2 = 1-a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0,1)$ la solución pedida es la positiva $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.