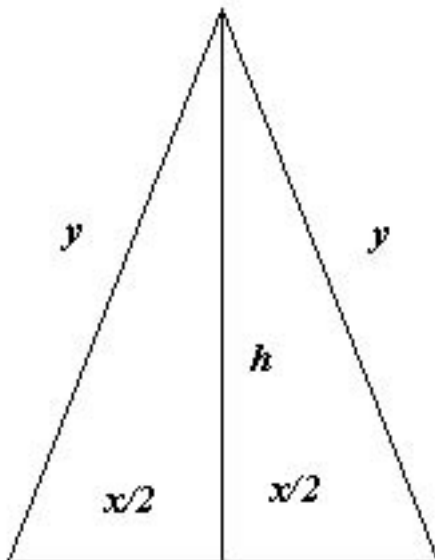


Examen de Matemáticas II (Junio 2004)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4 - x}} = 0 \implies x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88 + 21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \implies y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

Solución:

a) (a) **Asíntotas:**

- **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \implies y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

(b) Extremos:

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \implies x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x + 1/2$	-	+	+
$x - 1/2$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

b)

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx = \int \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2+1} dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2 + 1} \right) dx = x - \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + C$$

$$\int_0^1 \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1} dx = \left[x - \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \ln 5$$

Problema 3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

- a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a .
- b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

- a) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \implies |A| = -a - 3 = 0 \implies a = -3$$

Si $a \neq -3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$ y como el sistema es homogéneo resultaría que es compatible determinado. la solución en este caso sería $x = y = z = 0$.

Si $a = -3$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 \neq 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$ y como el sistema es homogéneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

- b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x - 2y = -4z \\ x + 2y = -z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos) Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}; \quad \pi_1 : 2 - 3x + 2y - z = 0; \quad \pi_2 : 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

- (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
- (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
- (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2 .

Solución:

a)

$$r : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1} \implies \begin{cases} 2x - 4 = -3y + 3 \\ -x + 2 = -3z + 12 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 10 = 0 \end{cases}$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1 : 3x - 2y + z - 2 = 0$, y tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & -7 \\ 1 & 0 & -3 & | & 10 \\ 3 & -2 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $|A| = -4 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ La recta corta al plano π_1 .

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2 : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$, y tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & -7 \\ 1 & 0 & -3 & | & 10 \\ 2 & 2 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Por otra parte tenemos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) $-\frac{3}{2} \neq \frac{2}{2} \implies \pi_1$ y π_2 se cortan.

c) Un punto de r es $P_r(2, 1, 4)$ y tendremos:

$$d(P_r, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$