Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Marzo 2003

Problema 1 *(4 puntos)*Consideramos el punto $P(5,-2,9)$ y la recta r : $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{6}$.

Calcular:

1. Distancia de P a r.
2. Ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y que pasa por P
3. Calcular el punto de corte T entre las rectas r y s.

Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,-3,6)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_rP}=(4,-1,9)$$

$$\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ -2 & -3 & 6\\ 4 & -1 & 9\end{array}\right|=(-21,14,42)$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{(-21)^2+14^2+42^2}=49,\quad |\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{4+9+36}=7$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{49}{7}=7$$

2. Ponemos la recta r en paramétricas $\left\{\begin{array}{rrr} x= & 1- & 2t\\ y= & -1- & 3t\\ z= & & 6t\end{array}\right.$.

   Luego el punto T de s y de r será en forma genérica $T(1-2t,-1-3t,6t)$.

   El vector $\overrightarrow{PT}=(-4-2t,1-3t,-9+6t)$ es perpendicular $\overrightarrow{u_r}$ y, por tanto, el producto escalar de ambos será cero

$$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Longrightarrow t=1\Longrightarrow\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{u_s}=(6,2,3)$$

   La recta que buscamos es

$$s:\frac{x-5}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-9}{3}$$

3. Por el apartado anterior tenemos $T(-1,-4,6)$

Problema 2 *(3 puntos)*Sabemos que las siguientes rectas se cortan en un punto. Hallar el valor de k y la ecuación en forma general del plano que determinan.

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+k}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-k}{3}$$

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-2) \\ P_r(-1,-k,1) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ P_s(0,-3,k) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1,-3+k,k-1)$$

Tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & +k \end{array} \right) \Longrightarrow |\overline{A}| = -7k+36 = 0 \Longrightarrow k = \frac{36}{7}$$

Si $k \neq \dfrac{36}{7} \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2$, y en este caso las rectas se cruzan.

Si $k = \dfrac{36}{7} \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 2 = \text{Rango}(A)$, y en este caso las rectas se cortan.

En este último caso, el plano que las contiene será:

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,3,-2) \\ P_s(0,-3,36/7) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi: \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y+3 \\ 3 & -2 & z-36/7 \end{array} \right| = 0$$

$$\pi: 91x - 56y + z + 204 = 0$$

Problema 3 *(3 puntos)*Sea el plano $\pi: x - 2y + 4z = 12$ y el punto $P(2,-1,1)$.

1. Calcular la distancia $d(P,\pi)$.
2. Hallar la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia d.
3. Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados.

Solución

1.

$$d(P,\pi) = \frac{2-2(-1)+4\cdot 1-12}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

2.

$$\pi' : x - 2y + 4z + \lambda = 0$$

$$d(P,\pi') = \frac{|2+2+4+\lambda|}{\sqrt{21}} = \frac{|8+\lambda|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Longrightarrow |8+\lambda| = 4$$

$$8+\lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow \pi' : x - 2y + 4z - 4 = 0$$

Cuando tomamos $8+\lambda = -4 \Longrightarrow \lambda = -12$ que es el plano π.

3. Corte del plano π con el eje OX:
Hacemos $y = 0$ y $z = 0$, obtenemos el punto $A(12, 0, 0)$.

Corte del plano π con el eje OY:
Hacemos $x = 0$ y $z = 0$, obtenemos el punto $B(0, -6, 0)$.

Corte del plano π con el eje OZ:
Hacemos $x = 0$ y $y = 0$, obtenemos el punto $C(0, 0, 3)$.

$$\overrightarrow{OA} = (12, 0, 0),\ \ \overrightarrow{OB} = (0, -6, 0),\ \ \overrightarrow{OC} = (0, 0, 3)$$

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -216$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{216}{6} = 36\, u^2$$