

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2004)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos)

- (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
- (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Solución:

- Un punto del plano $z = 0$ será $P(x, y, 0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3 \implies |2x - y - 4| = 9 \implies \begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$
$$s : \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

- El conjunto será:

$$\left\{ (x, y, z) \in R^3 : (x, y, z) \in r \vee (x, y, z) \in s \right\}$$

Problema 2 (2 puntos) El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

- (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
- (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
- (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .

Solución:

1.

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3. Corte con el eje OX : $y = 0, z = 0 \implies x = -1 \implies A(-1, 0, 0)$

Corte con el eje OY : $x = 0, z = 0 \implies y = 1 \implies B(0, 1, 0)$

Corte con el eje OZ : $x = 0, y = 0 \implies z = -2 \implies C(0, 0, -2)$

$$\vec{AC} = (0, 0, -2) - (-1, 0, 0) = (1, 0, -2)$$

$$\vec{AB} = (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 0)$$

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}| = \frac{\sqrt{4 + 4 + 1}}{2} = \frac{3}{2} u^2$$

Problema 3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

1. (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

3. (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje OX , la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

1. **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \implies x = -1, x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$x + 1$	-	+	+
$-x$	+	+	-
$f'(x)$	-	+	-

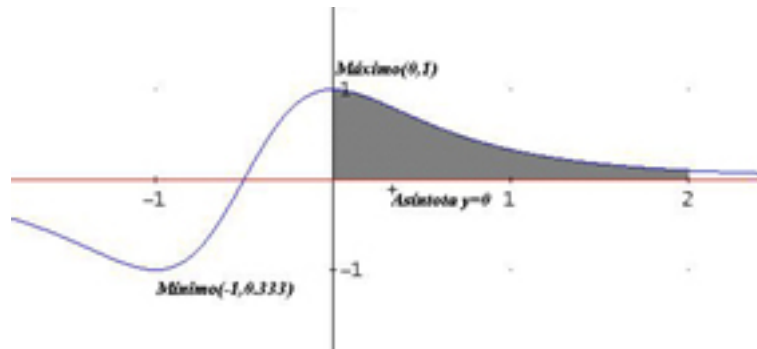
En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \implies y = 0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.



- 2.
- 3.

$$\int_0^2 \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \left. -\frac{1}{x^2 + x + 1} \right|_0^2 = \frac{6}{7}$$

Problema 4 (3 puntos)

1. (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

2. (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = 2, \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:

$\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1 .

Si tenemos en cuenta que $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:

$\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Indeterminado.

2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 2 - z \\ x + 2y = 1 - 2z \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$