Examen de Matemáticas II (Septiembre 2004)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos)

1. (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

2. (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Solución:

1. Un punto del plano $z = 0$ será $P(x, y, 0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \Longrightarrow |2x-y-4| = 9 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 2x - y - & 13 = 0 \\ 2x - y + & 5 = 0 \end{array} \right.$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 13 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

2. El conjunto será:

$$\left\{ (x, y, z) \in R^3 : (x, y, z) \in r o (x, y, z) \in s \right\}$$

Problema 2 (2 puntos) El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

1. (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

2. (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

3. (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Solución:

1.
$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$$

2.
$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

3. Corte con el eje OX: $y=0,\ z=0\Longrightarrow x=-1\Longrightarrow A(-1,0,0)$
Corte con el eje OY: $x=0,\ z=0\Longrightarrow y=1\Longrightarrow B(0,1,0)$
Corte con el eje OZ: $x=0,\ y=0\Longrightarrow z=-2\Longrightarrow C(0,0,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(0,0,-2)-(-1,0,0)=(1,0,-2)$
$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(-1,0,0)=(1,1,0)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\1&0&-2\\1&1&0\end{array}\right|=(2,-2,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}\ u^2$$

Problema 3 (3 puntos) Sea la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

1. (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
3. (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x=0$, y la recta $x=2$.

Solución:

1. **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x)=-\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}=0\Longrightarrow$ $x=-1,\ x=0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

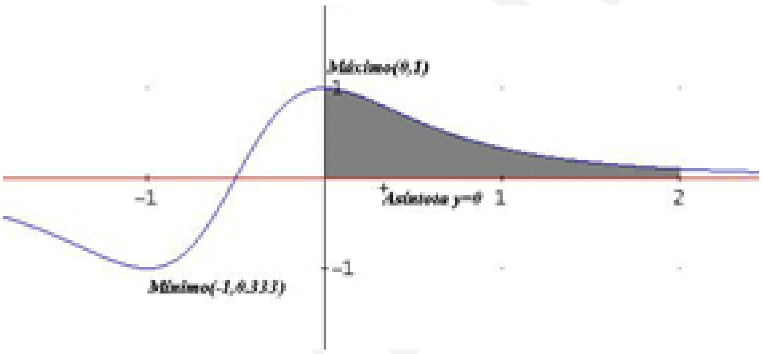
En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.



2.

3.

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x^2+x+1}\Big]_0^2 = \frac{6}{7}$$

Problema 4 (3 puntos)

1. (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda x+ & 3y+ & z & = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z & = & 1 \\ x+ & y- & z & = & 1 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A|=-2\lambda^2+2\lambda+4=0\Longrightarrow \lambda=2,\ \ \lambda=-1$$

Si $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq -1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\left|\begin{array}{rr} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right|=1\neq 0$, podemos concluir en este caso:

Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A)=2<$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1. Si tenemos en cuenta que $\left|\begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array}\right|=-4\neq 0$, podemos concluir en este caso:

Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A)=2<$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y+ & z= & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z= & 1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y= & 2- & z \\ x+ & 2y= & 1- & 2z \end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rr} x= & 1+4t \\ y= & -3t \\ z= & t \end{array}\right.$$