

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2004)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Determinar la matriz inversa de B .
2. (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Solución:

1.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A = BX \implies B^{-1}A = B^{-1}BX \implies B^{-1}A = X$$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos)

1. (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
2. (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1. |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \implies |A| = 0$$

2.

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 &= \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} k^2 - 6k + 5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2 + 2k - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} k^2 - 6k + 5 = 0 \\ 8(k-1) = 0 \\ 2 - 2k = 0 \\ k^2 + 2k - 3 = 0 \end{array} \right\} \implies k = 1$$

Problema 3 (3 puntos) Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

- (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π .
- (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ .
- (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenadas.

Solución:

- Calculo r , recta perpendicular a π que pasa por $P(0, 0, 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 2, 3) \\ P(0, 0, 0) \end{array} \right\} \implies r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

Esta recta cortará con el plano π en el punto P'' :

$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \implies t = \frac{3}{7} \implies P'' \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7} \right)$$

El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'' , es decir:

$$P'' = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7} \right)$$

El punto simétrico de $P(0, 0, 0)$ respecto al plano π es $P' \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7} \right)$.

2.

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_\pi = (1, 2, 3) \\ \vec{u} = (0, 0, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - y = 0$$

3. Los puntos de corte de π con los ejes será:

Corte con el eje OX : $y = 0, z = 0 \implies x = 6 \implies A(6, 0, 0)$

Corte con el eje OY : $x = 0, z = 0 \implies y = 3 \implies B(0, 3, 0)$

Corte con el eje OZ : $x = 0, y = 0 \implies z = 2 \implies C(0, 0, 2)$

Tendremos: $\overrightarrow{OA} = (6, 0, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 3, 0), \overrightarrow{OC} = (0, 0, 2)$:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6u^3$$

Problema 4 (3 puntos) Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

1. (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f .
3. (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

1.

$$f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7) = 0 \implies x = 4, x = 1, x = 7$$

Como $(x - 4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, \infty)$
$x - 1$	-	+	+
$x - 7$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+

Luego f crece en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1, 7)$.

2. Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \frac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\frac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.

3. Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2(x-4)(2x^2 - 16x + 23) = 0 \implies x = 4, \quad x = 1,8787, \quad x = 6,1213$$

Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \implies f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \implies f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es a través de la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \implies f'''(4) = -18 \neq 0$$

Luego se trata de un punto de inflexión.

