Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Marzo 2003

Problema 1 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = & 1- & t \\ y = & & t \\ z = & - & t \end{cases} \quad , \quad s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.
2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (-2, 1, 0)$, y tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -5 \neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = | \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} | = | -5| = 5$$

Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - 3k = (2, -1, -3) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{14}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14}$$

2. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -3)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x+5y+z-4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ 1 & -1 & y-1 \\ 1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-4y+2z+5 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x+ & 5y+ & z- & 4 = 0 \\ x- & 4y+ & 2z+ & 5 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 1. Calcula el área de un triángulo de vértices $A(3, 1, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(4, 1, -1)$.

2. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x - y - z - 1 = 0$ con la recta $s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 2x - y \quad + 2 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1); \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}| = |(1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s:

$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Longrightarrow 2t-(1+2t)-t-1 = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow P(-4, -3, -2)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u} = (2, -1, 0) \times (3, 1, 1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 5)$$

La recta pedida es

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{5}$$

Problema 3 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{lrrrr} \pi_1: & -x+ & 2y+ & z= & 0\\ \pi_2: & & ay+ & 4z= & 8\\ \pi_3: & & 4y+ & az= & 8\end{array}\right.$$

Solución

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a & 4 & 8\\ 0 & 4 & a & 8\end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = -(a^2-16)=0 \Longrightarrow a=4,\ \ a=-4$.

Si $a\neq 4$ y $a\neq -4$ tendremos que $|A|\neq 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 =nº de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a=4$ tendremos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 8\\ 0 & 4 & 4 & 8\end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\left|\begin{array}{rr} -1 & 2\\ 0 & 4\end{array}\right| = -4 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 2 <nº incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a=-4$ tendremos:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & 8\\ 0 & 4 & -4 & 8\end{array}\right)$$

Primero tenemos que $\left|\begin{array}{rr} -1 & 2\\ 0 & -4\end{array}\right| = 4 \neq 0$, por lo que Rango$(A)=2$.

Como

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 4 & 8\end{array}\right| = 64 \neq 0$$

tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 4 Dados los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 4, 2)$ y $C(1, 3, 1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2) \\ A(1, 2, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ 2 & 1 & y-2 \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x - 4y + 2z + 9 = 0$$

2.

$$d(O, \pi) = \frac{|9|}{\sqrt{1 + 16 + 4}} = \frac{9\sqrt{21}}{21} = 1,963961012\, u$$

3.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, -1), \quad \overrightarrow{OB} = (3, 4, 2), \quad \overrightarrow{OC} = (1, 3, 1)$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|-9| = \frac{3}{2} = 1,5\, u^3$$