Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Marzo 2004

Problema 1 *(5 puntos)*Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

Solución:

- Dominio: $R - \{0\}$
- Puntos de Corte:
  1. Con el eje OX: $\dfrac{x^2+1}{x} = 0 \Longrightarrow$ No hay cortes

     Con el eje OY: $f(0) = \dfrac{1}{0} \Longrightarrow$ No hay cortes.
- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)} = -f(x) \Longrightarrow$ La función es impar.
- Asíntotas:
  1. Verticales:

     $$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

     Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

     $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
  2. Horizontales:

     $$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$

     Luego no hay asíntotas horizontales.
  3. Oblicuas:

     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{x} = 0$$

     Luego la ecuación de la recta $y = x$ es la de una asíntota oblicua.

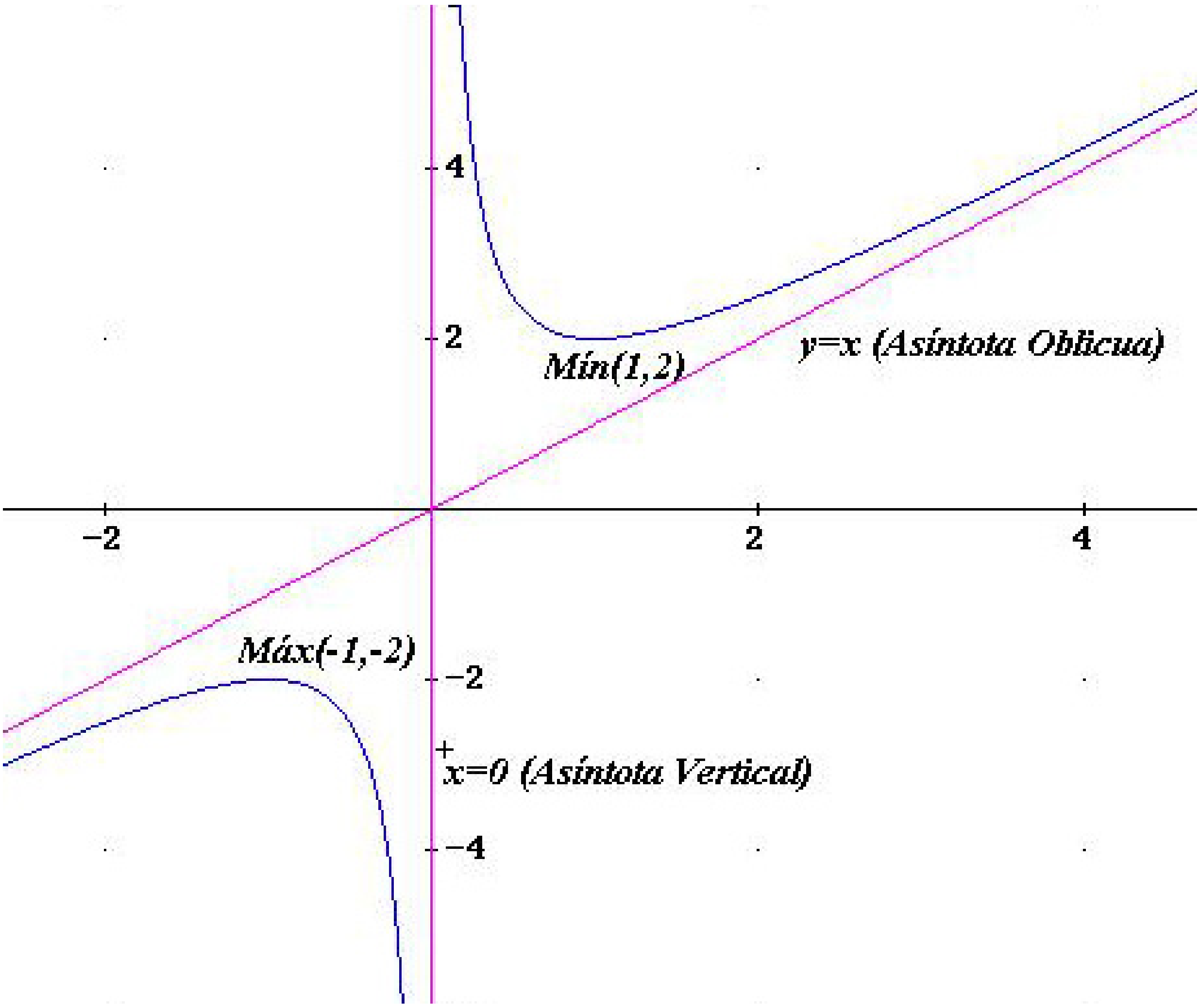
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$$

$$f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1,2)\,\text{es un Mínimo}$$

$$f''(-1) = -2 < 0 \Longrightarrow (-1,-2)\,\text{es un Máximo}$$



Problema 2 *(3 puntos)*Dada la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 67$, calcular:

1. Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función, f, en el punto de abcisa $x = 1$.

2. Escribir los intervalos en donde la función f sea creciente y en donde sea decreciente.

3. Determinar los valores de x en los que la función f alcanza un máximo y un mínimo relativo, respectivamente. ¿Cuánto vale la función en estos puntos?.

Solución:

1.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 60 \Longrightarrow m = f'(1) = -72$$

$$f(1) = 0 \Longrightarrow y = -72(x-1)$$

2.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 60 = 0 \Longrightarrow x = -2, \;\; x = 5$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 5)$	$(5, +\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

3. En $x = -2$ tenemos el punto $(-2, 135)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

   En $x = 5$ tenemos el punto $(5, -208)$ y en él, la función pasa de decrecer a crecer, luego es un Mínimo.

Problema 3 *(2 puntos)*Hallar los valores de los parámetros a y b para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} ax^3 - bx + 1 & \text{si} & x < 2 \\ bx^2 + ax - 1 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

sea continua y derivable en R.

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(ax^3 - bx + 1) = 8a - 2b + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(bx^2 + ax - 1) = 4b + 2a - 1$$

$$8a - 2b + 1 = 4b + 2a - 1 \Longrightarrow 3a - 3b + 1 = 0$$

Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 3ax^2 - b & \text{si} & x < 2 \\ 2bx + a & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

$$f'(2^-) = 12a - b, \;\; f'(2^+) = 4b + a \Longrightarrow 12a - b = 4b + a \Longrightarrow 11a - 5b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a - 3b + 1 = 0 \\ 11a - 5b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{5}{18} \\ \\ b = \dfrac{11}{18} \end{array} \right.$$