Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(4 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = & 2- & 3t \\ y = & & t \\ z = & 1- & t \end{cases}, \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.
2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, -1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, -2, 1)$, y tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -2 \neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_sP_r}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = | \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} | = |-2| = 2$$

Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2j + 2k = (0, 2, 2) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = 2\sqrt{2}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (0, 2, 2)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (0, 2, 2) \\ P_r(2, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} -3 & 0 & x-2 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+3y-3z-1 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_t} = (0, 2, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y-2 \\ 1 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+y-z-4 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{llll} 2x+ & 3y- & 3z- & 1 = 0 \\ 2x+ & y- & z- & 4 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Determine los puntos de la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos $\pi_1 : 3x + 4y = 1$ y $\pi_2 : 4x - 3z = 1$.

Solución:
Un punto genérico de la recta sería $P(1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2 + 18t|}{5}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|9 + 2t|}{5}$$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 + 18t = 9 + 2t \Longrightarrow t = \dfrac{11}{16} \\ \\ -2 + 18t = -(9 + 2t) \Longrightarrow t = -\dfrac{7}{20} \end{array} \right.$$

Tendríamos dos puntos:

$$P_1\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{6}, -\frac{5}{8}\right), \quad P_2\left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10}\right)$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2, 3, -1)$, $B(3, 3, 2)$ y $C(1, 4, 3)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.

2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.

3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,3), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,1,4)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,4) \\ A(2,3,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-3 \\ 3 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 3x + 7y - z - 28 = 0$$

2.

$$d(O,\pi) = \frac{|-28|}{\sqrt{9+49+1}} = \frac{28\sqrt{59}}{59} = 3,645289507\, u$$

3.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (2,3,-1), \quad \overrightarrow{OB} = (3,3,2), \quad \overrightarrow{OC} = (1,4,3)$$

$$V = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} | = \frac{1}{6}|-28| = \frac{14}{3} = 4,666\, u^3$$