Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(3 puntos)*Discute la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro m.

$$\begin{cases} \pi_1: & x- & y & & = & 1 \\ \pi_2: & 2x+ & 3y & -5z = & -16 \\ \pi_3: & x+ & my & -z = & 0 \end{cases}$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = 5m = 0 \Longrightarrow m = 0$.

Si $m \neq 0$ tendremos que $|A| = 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $m = 0$ tendremos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Si calculamos

$$\left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right| = 13 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Además vemos que $\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{array} \right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema es Incompatible.

Comparamos los planos dos a dos y tenemos:

π_1 y π_2 se cortan.

π_1 y π_3 se cortan.
π_2 y π_3 se cortan.
Se cortan los tres planos dos a dos.

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y & +2z = & 1 \\ 2x+ & y & = & -1 \end{array} \right.$$

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Calcular:

1. La posición relativa de ambas.
2. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right| = -2i + 4j + 3k = (-2, 4, 3)$$

Para encontrar un punto de la recta r hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow y = -1, \ z = 0 \Longrightarrow P_r(0, -1, 0)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 4, 3) \\ P_r(0, -1, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_s(1, -1, 1) \end{array} \right.$$

1. Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_rP_s} = (1, 0, 1)$

   $$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

   Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

2. $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 4, 3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{rrc} -2 & 2 & x \\ 4 & 1 & y+1 \\ 5 & -1 & z \end{array} \right| = 9x - 8y + 10z - 8 = 0$$

Problema 3 *(4 punto)* Dada la recta $r : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : 3x + y - z - 1 = 0$. Se pide:

1. Comprobar que posición ocupa esta recta respecto a este plano.

2. En caso de corte, calcular el ángulo que ocupan.
3. Calcular la proyección ortogonal de esta recta sobre el plano.

Solución:

1. Ponemos la ecuación de la recta como intersección de dos plano:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}\Longrightarrow x+y-1=0$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{z-1}{2}\Longrightarrow 2x+z-3=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & & -1=0\\ 2x+ & & +z & -3=0\end{array}\right. \quad \pi: 3x+y-z-1=0$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)$$

Como $|A|=4\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})=3\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, se cortan en un punto.

2.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \quad \pi:\overrightarrow{u_\pi}=(3,1,-1)$$

$$\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{-4}{\sqrt{66}}\Longrightarrow \alpha=-29.49620849^{o}$$

3. Se obtiene como intersección de dos planos, el plano dado π y el plano definido por:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(3,1,-1)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{rrc} -1 & 3 & x-1\\ 1 & 1 & y\\ 2 & -1 & z-1\end{array}\right| = 3x-5y+4z-7=0$$

La proyección ortogonal será:

$$s:\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 5y+ & 4z- & 7=0\\ 3x+ & y- & z- & 7=0\end{array}\right.$$

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ A(1,-1,0)\end{array}\right. \quad \pi:\overrightarrow{u_\pi}=(2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ A(1,-1,0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$