Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Junio 2003-Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 2 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

2. (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

3. (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

1. El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.

En las hojas finales dibujo la gráfica.

2.

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

3.

$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{(e^x - x)^3} = 0 \Longrightarrow 1 - e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x-4) + 2}{(e^x - x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0,1)$ es un máximo.

En las hojas finales dibujo la gráfica.

Problema 4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
2. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

Solución:

1. Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,-1) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (6,2,1) \\ P_r(-2,1,0) \end{array} \right.$$

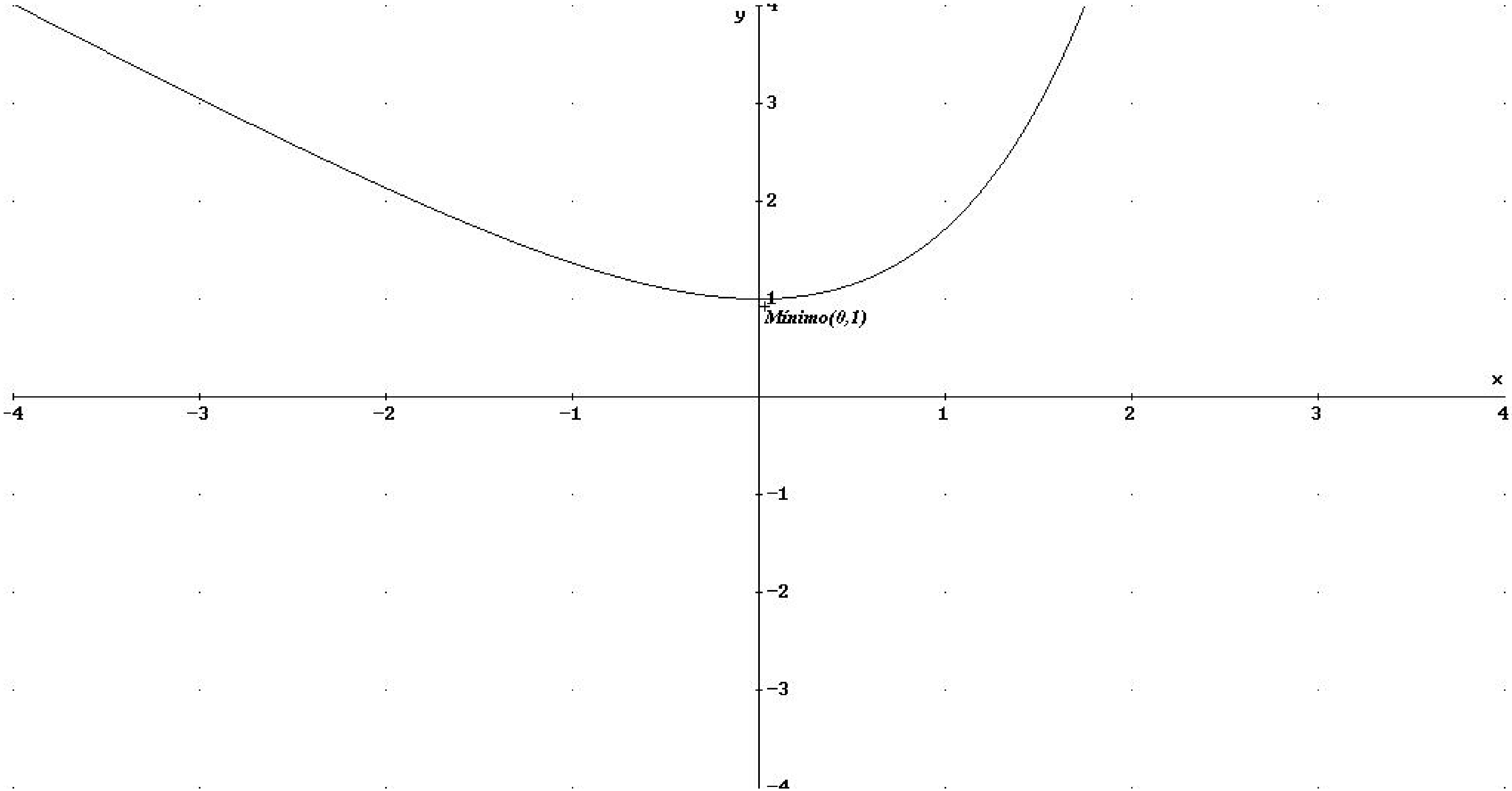
$$\pi' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

2.

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \frac{5}{2} \cdot \lambda \\ \\ y = 1 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Gráfica de la función $f(x) = e^x - x$



Representación gráfica $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}-x}$