Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2003

1. (a) Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

   (b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

   Solución:

   (a) El dominio de $y = e^{x+2}$ y $y = e^{-x}$ es todo R y, por tanto, no tienen asíntotas verticales; además son continuas y positivas. Por otro lado tenemos:

   - $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{x+2} = e^{-\infty} = 0$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{x+2} = e^{\infty} = \infty$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

   Es decir, las dos funciones tienen una asíntota horizontal en común $y = 0$ y, por tanto, no tienen asíntotas oblicuas.

   Los puntos de corte entre estas dos funciones serán el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, e)$$

   Los puntos de corte entre la función $y = e^{x+2}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, e^2)$$

   Los puntos de corte entre la función $y = e^{-x}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{-x} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, 1)$$

   El área pedida vendrá dada por

   $$\int_{-\infty}^{-1} e^{x+2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\cdot e^{2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx =$$

   $$e^2\left[e^x\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e^2(e^{-1} - 0) + (-e^0 + e) = 2e - 1$$

2. Dada la función $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$, se pide:

(a) Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

(a)

- **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $5 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.
- **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

$$x\sqrt{5-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0,\ \ x = \sqrt{5},\ \ x = -\sqrt{5}$$

Luego los puntos de corte son $(0,0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.

- **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, luego el punto de corte es $(0,0)$.
- **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{5-(-x)^2} = -f(x)$$

Luego la función es simétrica respecto al origen O.

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 5-2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$$

Sólo queda por decidir si estos puntos son máximos o mínimos, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), \ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \ \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right),$$

En conclusión:

Cuando $x \in \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es decreciente.

Cuando $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es creciente.

Cuando $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ la función es decreciente

En el punto $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

En el punto $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo.

- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

(b) Como la gráfica es simétrica respecto al origen el área buscada será el doble de la encerrada en el intervalo $[0, \sqrt{5}]$.

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{5-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}} 2x\sqrt{5-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(5-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{125}}{3}$$

Podemos concluir: **Área**$= \dfrac{2\cdot\sqrt{125}}{3}\ u^2$

3. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2-1$, $y = 11-x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2-1 \\ y = 11-x \end{array}\right. \Longrightarrow x^2-1 = 11-x \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (3,8) \\ (-4,15) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2-1 \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1,0) \\ (-1,0) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = 11 - x \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x = 11 \Longrightarrow (11, 0)$$

El recinto pedido estará encerrado entre los puntos $(1, 0)$, $(3, 8)$ y $(11, 0)$. Luego el área será:

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx + \int_3^{11} (11 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 + \left[11x - \frac{x^2}{2}\right]_3^{11}$$

Luego $A = \dfrac{116}{3}\ u^2$

4. Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx$

Solución:

Descomponemos el denominador en factores

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$$

Empleamos el método de descomposición polinómica

$$\frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$\frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \Longrightarrow$$

$$x + 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

Dando valores a x tenemos:

Si $x = 0 \Longrightarrow 1 = -6A \Longrightarrow A = -\dfrac{1}{6}$

Si $x = 2 \Longrightarrow 3 = 10B \Longrightarrow B = \dfrac{3}{10}$

Si $x = -3 \Longrightarrow -2 = 15C \Longrightarrow C = -\dfrac{2}{15}$

Sustituyendo estos valores en la integral tenemos

$$\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx = \int \frac{-1/6}{x}\, dx + \int \frac{3/10}{x-2}\, dx + \int \frac{-2/15}{x+3}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + K$$

5. Calcula el área que tiene el único recinto cerrado y limitado por las gráficas de las funciones $y = -x^2 + 7$ e $y = \dfrac{6}{x}$ (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x^2 + 7 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{array} \right. \Longrightarrow -x^2 + 7 = \frac{6}{x} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1,6) \\ (2,3) \\ (-3,-2) \end{array} \right.$$

El recinto está comprendido entre los puntos $(1,6)$ y el $(2,3)$.

$$A = \int_1^2 \left(-x^2 + 7 - \frac{6}{x} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x - 6\ln|x| \right]_1^2 = \frac{14}{3} - 6\ln 2 \ u^2$$

6. La gráfica de la curva $y = x\cos x$, cuando $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, y el eje OX limitan una superficie. Determinar el área de esa superficie.

Solución:

La función $y = x\cos x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ es positiva, luego el área que buscamos es

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \ dx$$

que vamos a resolver por partes

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x \, dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right.$$

$$\int x\cos x \ dx = x\sin x - \int \sin x \ dx = x\sin x + \cos x + C$$

Luego

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \ dx = [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \ u^2$$

7. Calcular integrando por partes, el valor de:

$$\int_1^2 x^2 \ln x \ dx$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2 \, dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x} \, dx \\ \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right.$$

$$\int x^2 \ln x \; dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{1}{3}x^2 \; dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3$$

Luego

$$\int_1^2 x^2 \ln x \; dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

8. Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Luego el punto buscado es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2 \; dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} \; dx$$

Calculamos las dos integrales independientemente.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2 \; dx = \left[\sqrt{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}$$

Para resolver la segunda integral hacemos un cambio de variable

$$x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t \; dt$$

Los nuevos límites de integración serán

Si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Si $x = 1 = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$. Luego

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} \; dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\; \cos t \; dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \; dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \; dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

El resultado final será:

$$A = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}$$

9. Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

   Solución:

   - **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

     $$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

     $$\Longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

     Como $x = 1 - \sqrt{2}$ no pertenece al dominio, resulta que el único extremo es $x = 1 + \sqrt{2}$. Sólo queda por decidir si este punto es máximo o mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.
   - **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

     $$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

     Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

     $$(-\infty, -1)\,,\ \left(1, 1 + \sqrt{2}\right),\ \left(1 + \sqrt{2}, \infty\right),$$

     En conclusión:
     Cuando $x \in (-\infty, -1)$ la función es creciente.
     Cuando $x \in \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$ la función es decreciente.
     Cuando $x \in \left(1 + \sqrt{2}, \infty\right)$ la función es creciente
     En el punto $(1 + \sqrt{2}; 0.84)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

- **Concavidad:** Para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

Como la segunda derivada es siempre mayor que cero, la función es siempre cóncava.

- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

10. Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haga también su gráfica aproximada de la función en un entorno de ese punto.

Solución:

Para calcular el punto de inflexión tenemos que hacer $f''(x) = 0$.

$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ posible punto de inflexión. $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow$ podemos asegurar que es de inflexión, que será el $(1, 0)$. La pendiente de la recta tangente a esta función een este punto vale $m = f'(1) = -6$, luego la ecuación de la recta buscada es

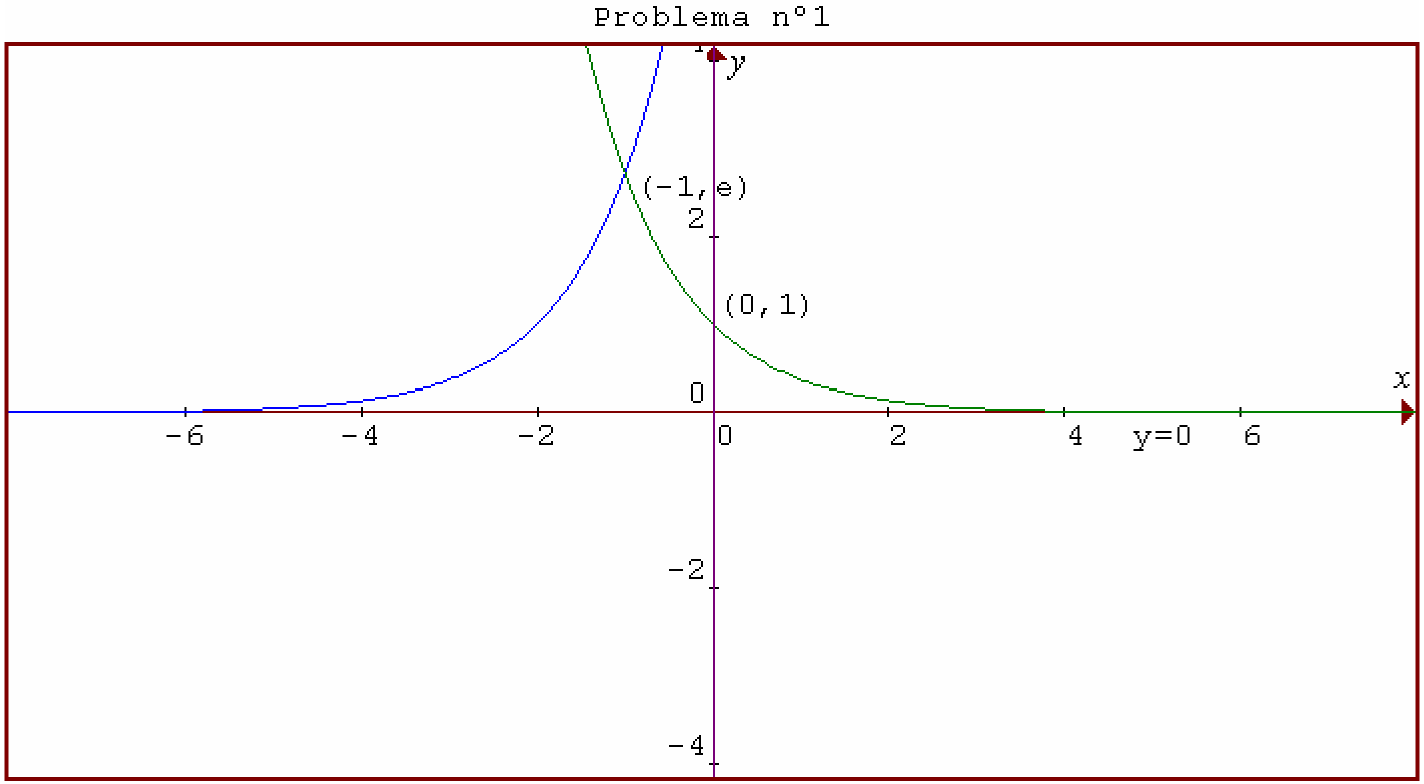
$$y - 0 = -6(x-1) \Longrightarrow 6x + y - 6 = 0$$

En un entorno de este punto la función pasará de cóncava a convexa o recíprocamente, habrá que ver también si en ese pequeño entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ la función es creciente.

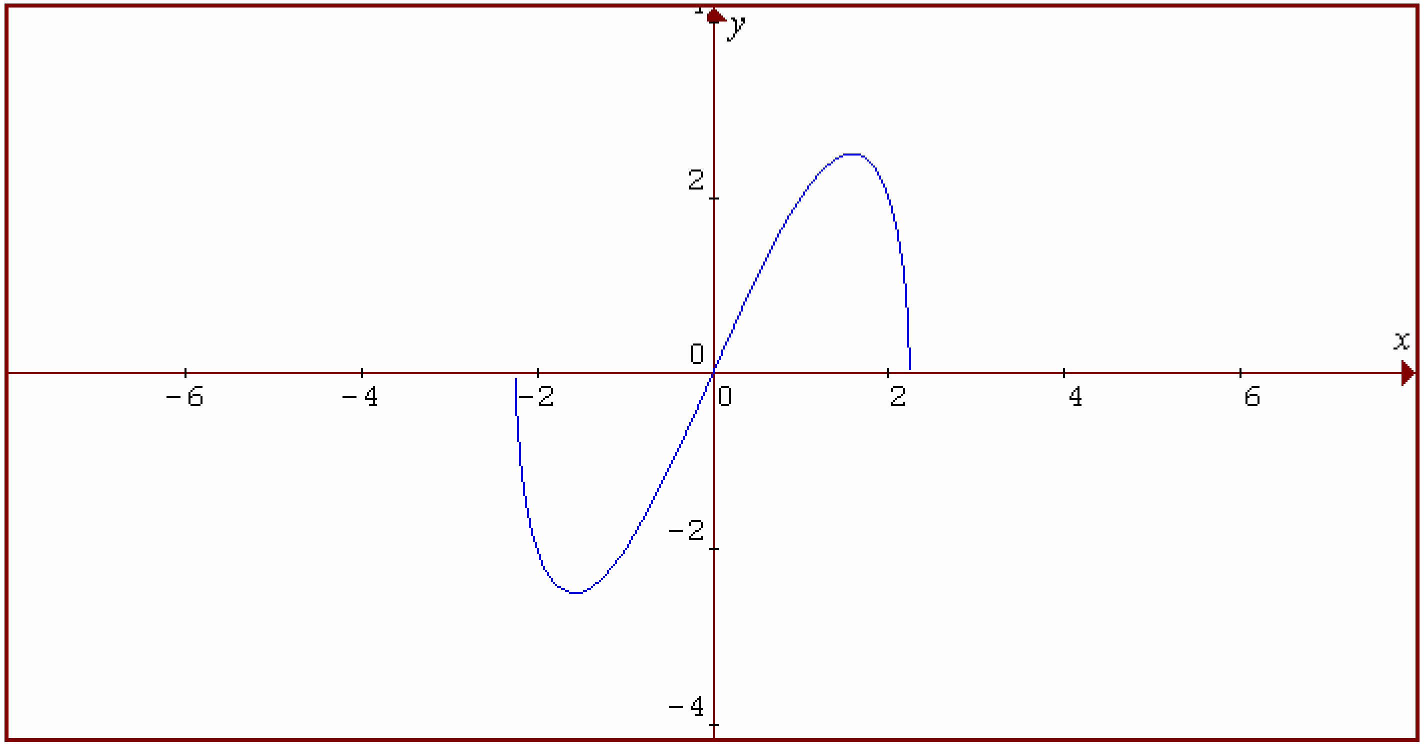
	$(1-\varepsilon, 1)$	$(1, 1+\varepsilon)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	decreciente	decreciente

	$(1-\varepsilon, 1)$	1	$(1, 1+\varepsilon)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	convexa	PI	cóncava

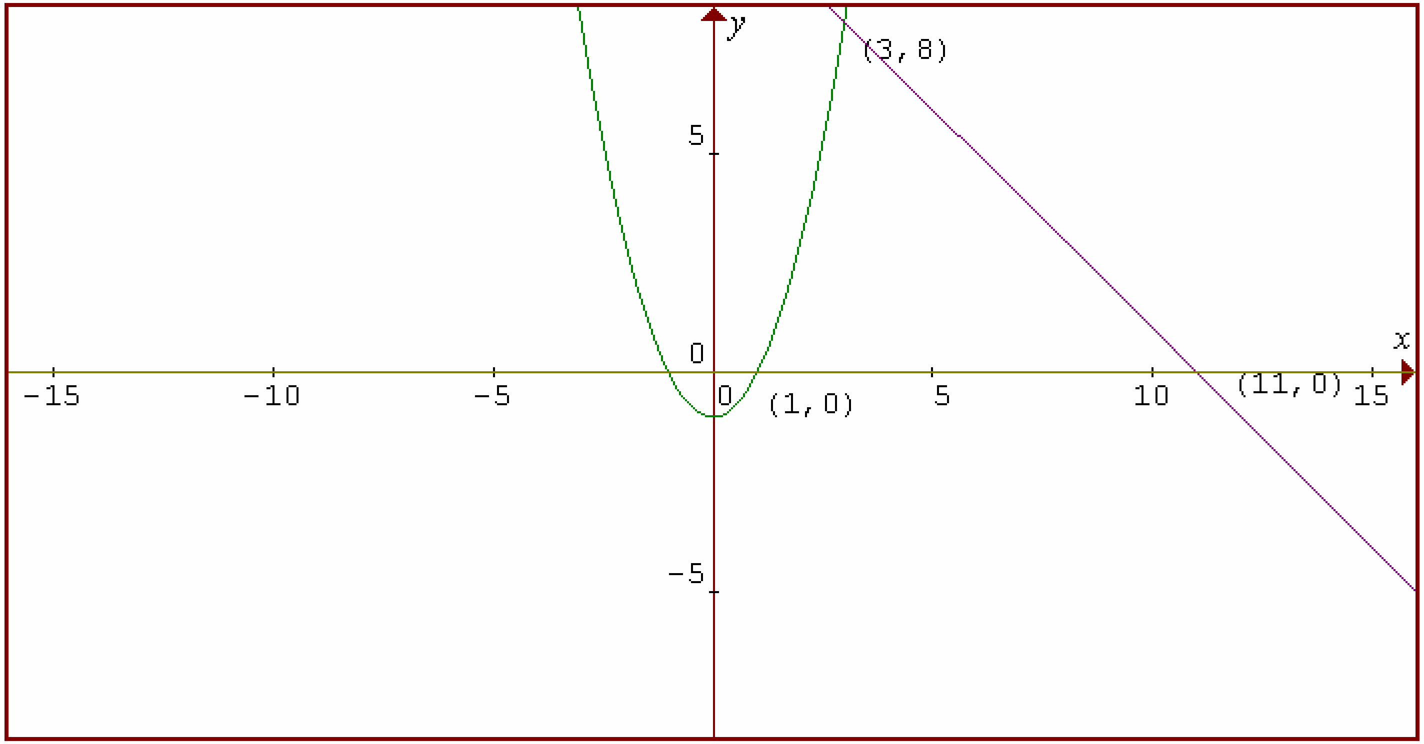
Con estos datos se puede dibujar la gráfica.


Problema n°1
y
x
(-1, e)
(0, 1)
y=0
-6
-4
-2
0
2
4
6
2
0
-2
-4

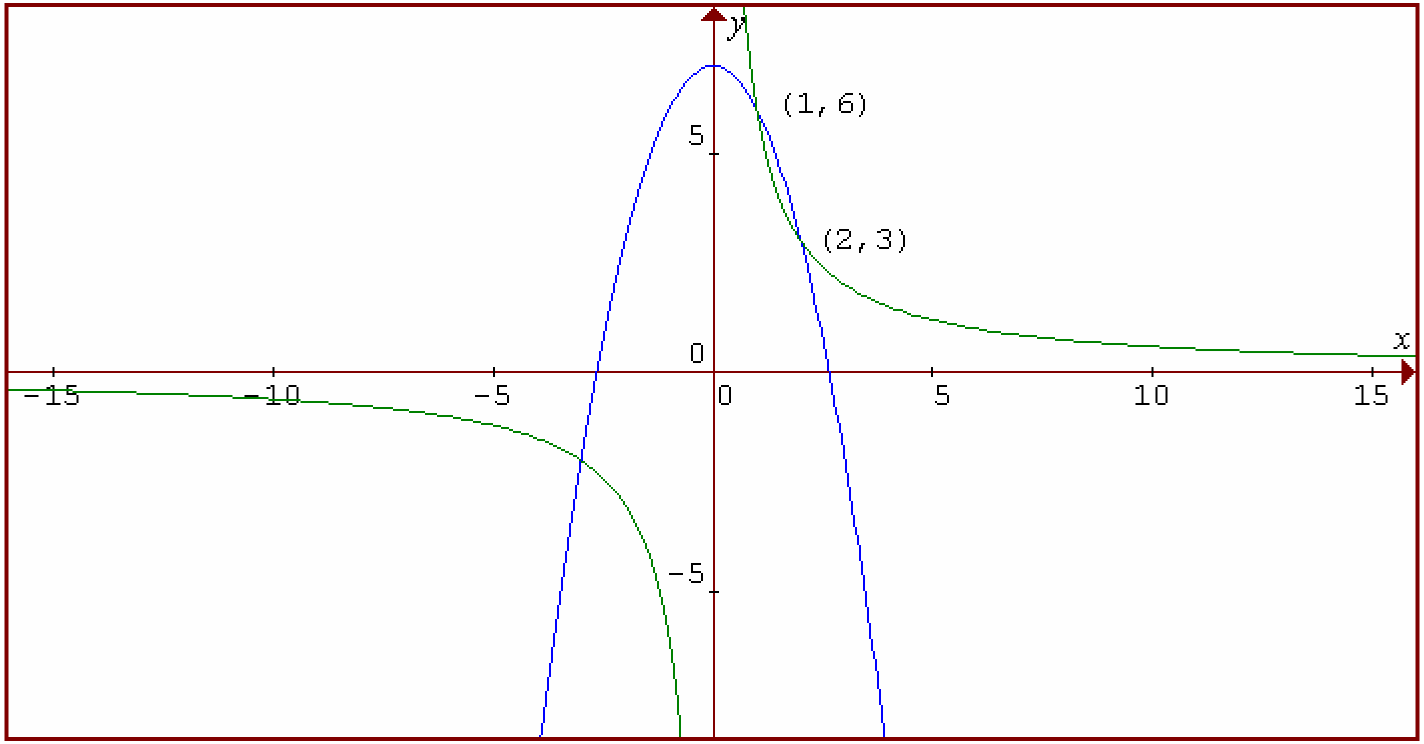
Problema n°2



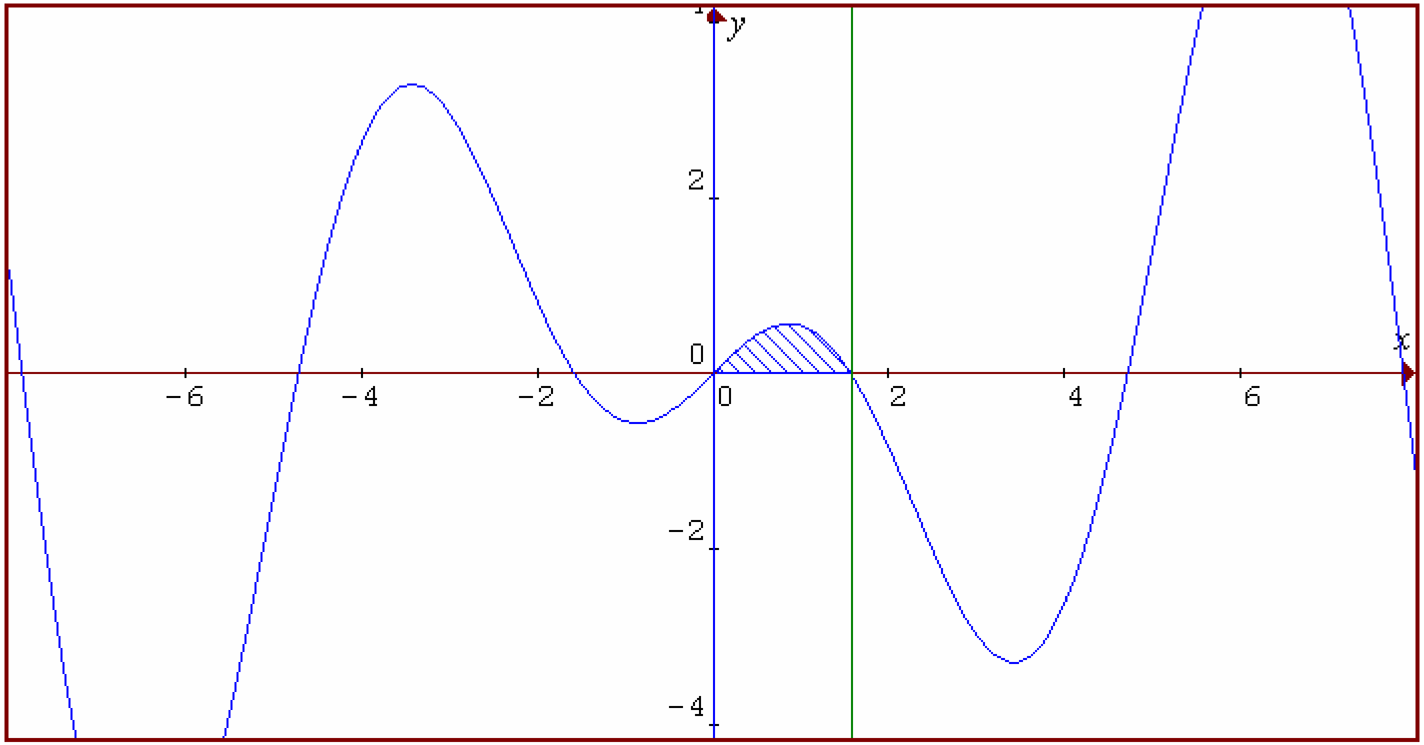
Problema 3°



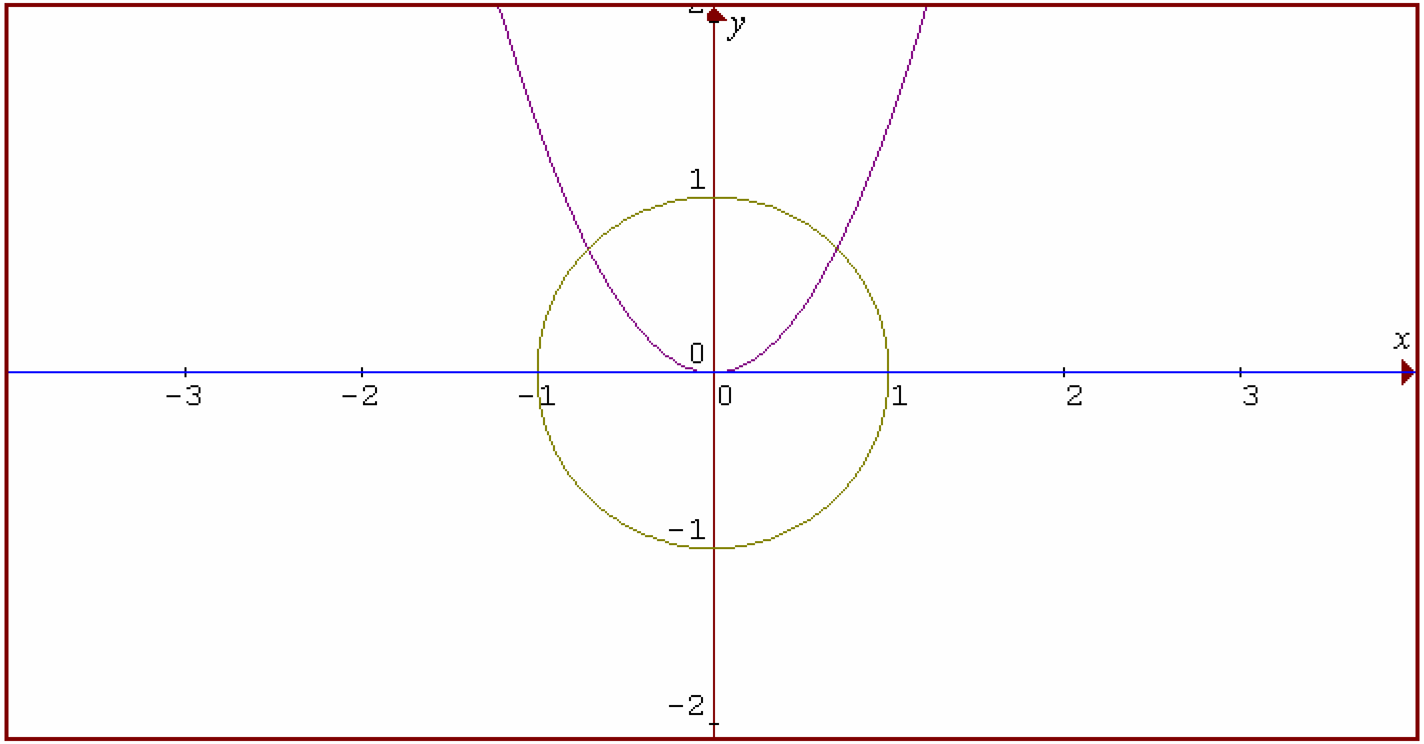
Problema n°5

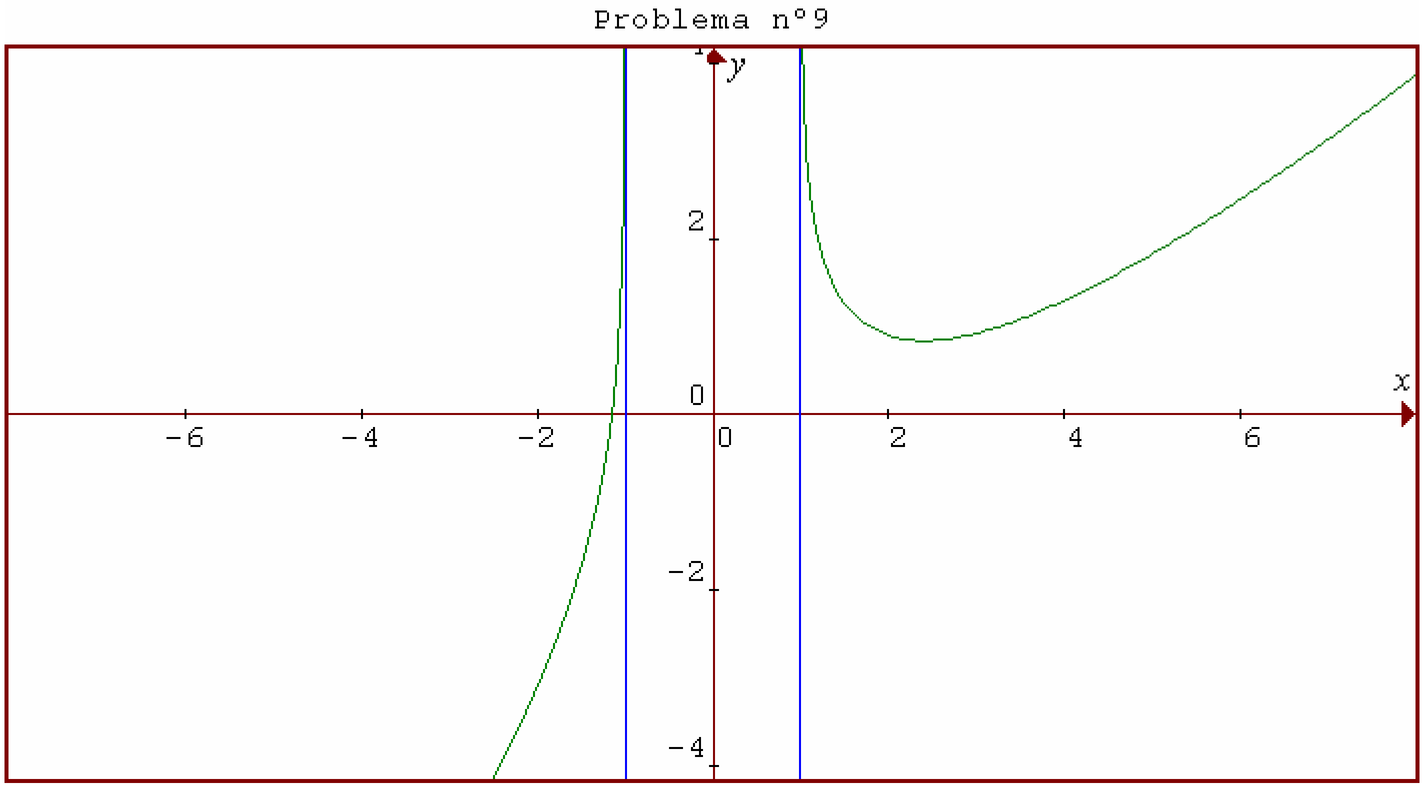


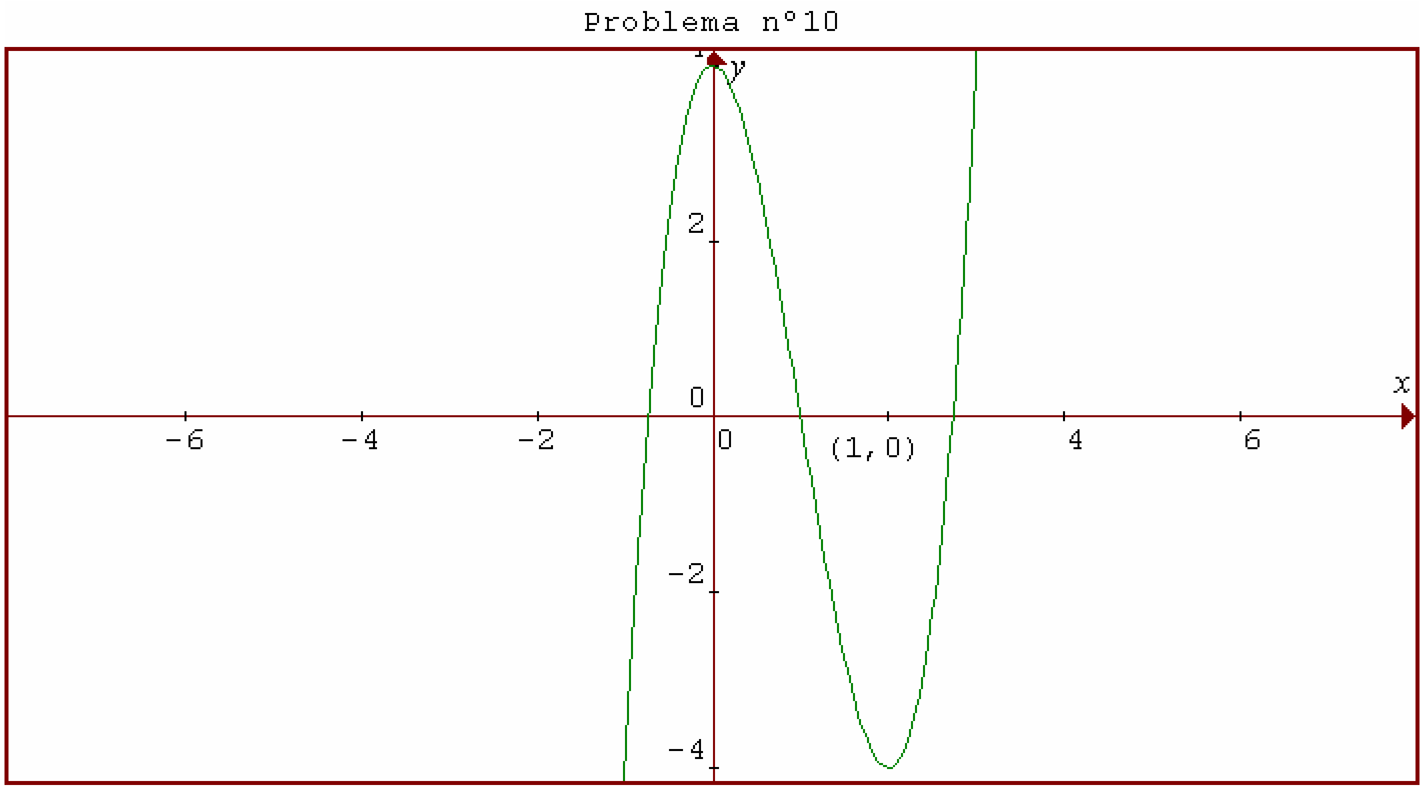
Problema n°6



Problema n°8




Problema n°9
y
x
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
6


Problema n°10
y
x
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
(1,0)
4
6