Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2003

1. Representa gráficamente la curva $y = x + \frac{1}{x}$. Para ello calcula asíntotas, puntos criticos e intervalos de crecimiento.

   Solución:

   (a) Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$

     La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$

     Luego no hay asíntotas horizontales.
   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

     $$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

     $$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} - x \right) = 0$$

     Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

   (b) Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

     $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

     Que serían los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$
   - **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

     $$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo, el estudio del signo se reduce al de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(-1, -2)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(1, 2)$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

2. Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

(a) Calcular el dominio de f y puntos de corte si los hay.

(b) Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(c) Simetrías.

(d) Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.

(e) Dibujar la gráfica de f.

Solución:

(a) **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R$.

- **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$

Luego los puntos de corte son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

- **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1$, luego el punto de corte es $(0, -1)$.

(b) Calculamos las asíntotas

- **Asíntotas verticales:** No hay ningún valor que anule el denominador de esta fracción y, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

(c) **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$$

Luego la función es simétrica respecto al eje OY.

(d) Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow 4x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ f(0) = -1$$

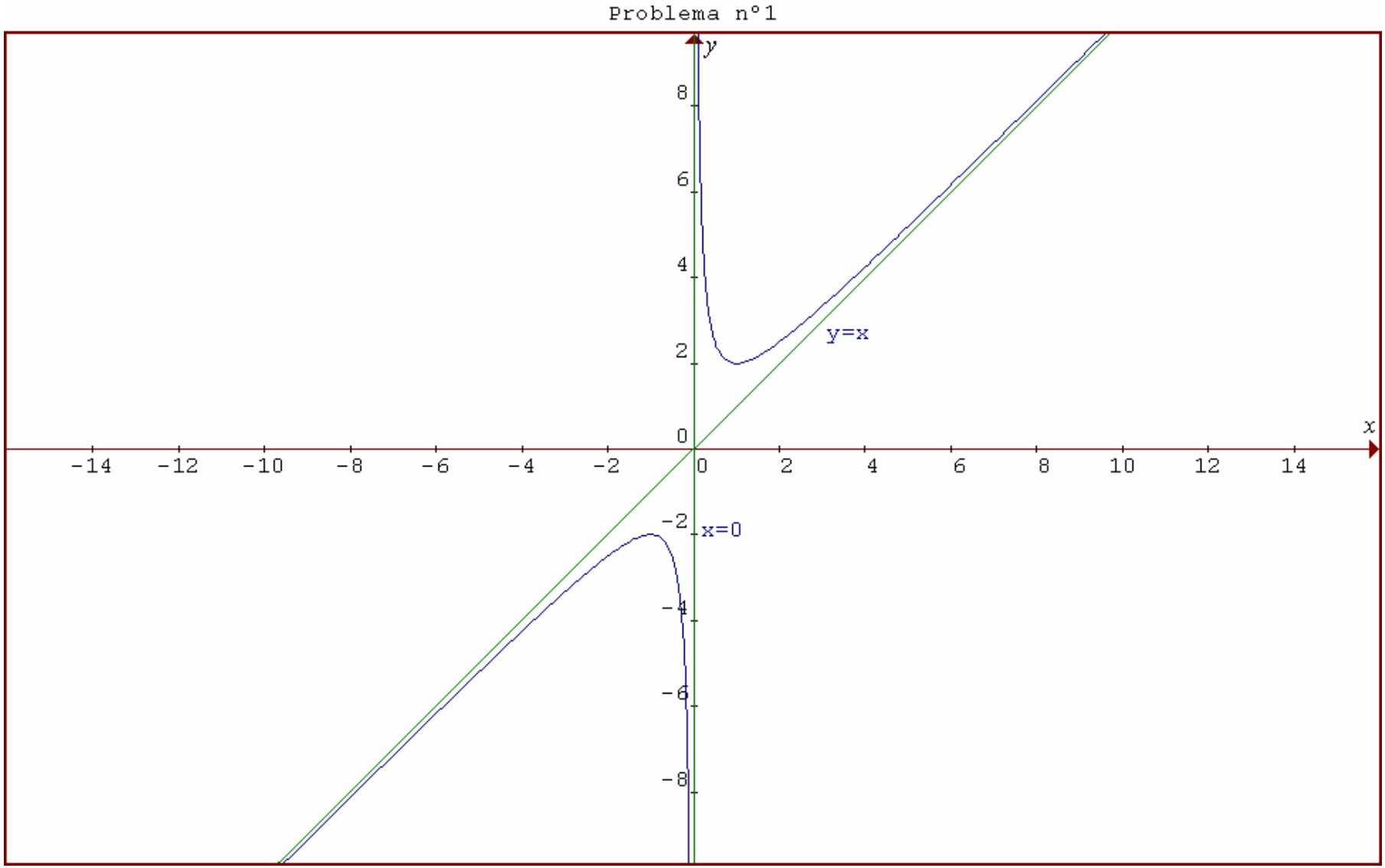
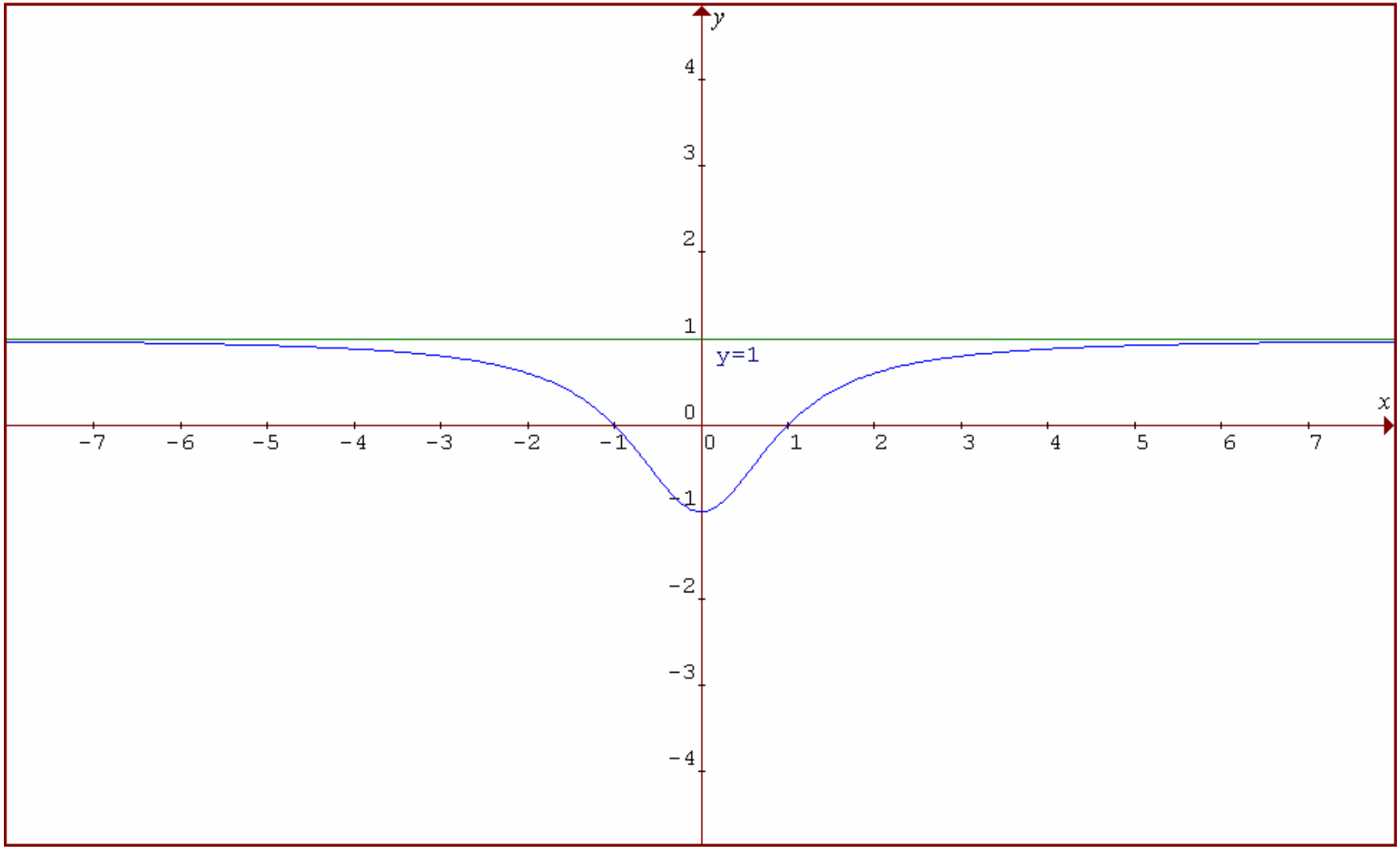
Sólo queda por decidir si el punto $(0, -1)$ es un máximo o un mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $4x$, que es positivo cuando $x > 0$, y por el contrario, es negativo cuando $x < 0$. En conclusión:
Cuando $x < 0$ la función es decreciente.
Cuando $x > 0$ la función es creciente.
En el punto $(0, -1)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

(e) Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.


Problema n°1
y
x
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
y=x
x=0

Problema n°2