Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Marzo 2003

Problema 1 *(3 puntos)*

1. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1,1,2)$ al plano que pasa por los puntos $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$.

2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $P(3,5,0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(0,1,2)$ y $B(0,1,1)$.

Solución:

1. Vamos a calcular el plano que pasa por los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$. Para ello obtenemos los vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$$

El plano vendrá definido por

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{v} = (-1,0,1) \\ A(1,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi : \left| \begin{array}{rrl} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Ahora calculamos la distancia del punto $P(1,1,2)$ al plano π:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_o + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1+1+2-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. Primero calculamos el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(0,1,2)$ y $B(0,1,1)$, para ello calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (0,1,1) - (0,1,2) = (0,0,-1)$, y un vector auxiliar $\overrightarrow{AP} = (3,5,0) - (0,1,2) = (3,4,-2)$. Ahora calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \left| \begin{array}{ccr} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{array} \right| = 4i - 3j = (4,-3,0)$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{1}} = 5$$

Problema 2 *(3 puntos)* Compruebe que las rectas

$$r : (x, y, z) = (3, -4, 0) + t(2, -3, -2)$$

$$s : (x, y, z) = (-7, 1, 2) + h(4, -1, 0)$$

se cortan en un punto. Halle también la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, -2) \\ P_r = (3, -4, 0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (4, -1, 0) \\ P_s = (-7, 1, 2) \end{cases}$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (-7, 1, 2) - (3, -4, 0) = (-10, 5, 2)$ y tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = 0 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

El plano que determinan estas dos rectas será:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, -2) \\ \overrightarrow{u_s} = (4, -1, 0) \\ P_r = (3, -4, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-3 \\ -3 & -1 & y+4 \\ -2 & 0 & z \end{vmatrix} = x + 4y - 5z + 13 = 0$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
2. Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
3. Hallar el punto P'',simétrico de P respecto de π.

Solución:

1. Hallamos primero la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r y que pase por P. Este plano tendrá como vector normal al vector director de la recta $u_r = (0,1,1)$.

   La ecuación general de este plano será $y + z + K = 0$, para calcular K particularizamos que este plano contiene al punto $P(1,1,0)$, y por simple sustitución tenemos que

   $1 + 0 + k = 0 \Longrightarrow k = -1 \Longrightarrow \pi' : y + z - 1 = 0$

   Ahora tenemos que encontrar el punto de corte de este plano y la recta r, para ello creo que lo más fácil es con la ecuación de la recta en forma paramétrica

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$$

   Sustituyendo en el plano tendremos $t + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ el punto que buscamos será por tanto $Q\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

   La recta que queremos obtener pasa por P y por Q:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{QP} = (1,1,0) - \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \\ P(1,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \dfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right.$$

2. El punto Q que hemos obtenido será el punto medio entre P y P', y por tanto

$$Q = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2Q - P = 2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,1,0) = (1,0,1)$$

3. Ahora la recta que une los puntos P y P'' es perpendicular al plano π, y por tanto el vector director de esta recta es el vector normal del plano, llamando t a esta recta podemos ponerlo de la siguiente manera $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_t} = (1,1,1)$

$$t : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,1) \\ P(1,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{array}\right.$$

   Buscamos el punto de corte de esta recta con el plano π, por simple sustitución

$$1 + \mu + 1 + \mu + \mu = 1 \Longrightarrow \mu = -\frac{1}{3}$$

Obtenemos el punto de corte $H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$H = \frac{P + P''}{2} \Longrightarrow P'' = 2H - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$