# Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

**Marzo 2003**

**Problema 1** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-3,1)$, $B(2,3,1)$ y $C(1,3,-1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano $\pi$ que los contiene.
2. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano $\pi$
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son $A$, $B$, $C$ y el origen de coordenadas.

**Solución:**

1. El plano $\pi$ viene determinado, como siempre, por dos vectores y un punto:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,6,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,6,-2) \\ A(1,-3,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \pi : -6x + y + 3z + 6 = 0$$

2. 

$$d(O,\pi) = \frac{|0\cdot(-6) + 0\cdot 1 + 0\cdot 3 + 6|}{\sqrt{36+1+9}} = \frac{6}{\sqrt{46}}\ u$$

3. El volumen de un tetraedro es $V = \dfrac{1}{3}\cdot b\cdot h$, donde $b$ es el área de la base y $h$ la altura.

$$b = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(-12,2,6)| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b = \frac{1}{2}\sqrt{144+4+36} = \sqrt{46}\ u^2$$

$$h = d(O,\pi) = \frac{6}{\sqrt{46}} \Longrightarrow\ V = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{46}\cdot\frac{6}{\sqrt{46}} = 2\,u^3$$

**Problema 2** *(4 puntos)* Sea el plano $\pi : x - 2y - z + 1 = 0$
Hallar:

1. El punto simétrico $P'$ de $P(1,3,2)$ y el punto simétrico $Q'$ de $Q(4,0,-1)$ respecto de $\pi$.

2. La recta simétrica de la recta que une a los puntos $P$ y $Q$ respecto del plano $\pi$.

**Solución:**

1. Para calcular el punto $P'$ simétrico de $P$ calculamos una recta perpendicular al plano $\pi$ y que pase por $P$, sea $r$ dicha recta

$$r: \left\{ \begin{array}{ll} x = 1+ & t \\ y = 3- & 2t \\ z = 2- & t \end{array} \right.$$

Para calcular el punto de corte de $r$ y $\pi$ hacemos
$(1+t) - 2(3-2t) - (2-t) + 1 = 0 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow P''(2,1,1)$
$P''$ es el punto medio entre $P$ y $P'$, luego

$$P'' = \frac{P' + P}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = 2(2,1,1) - (1,3,2) = (3,-1,0)$$

Para calcular el punto $Q'$ simétrico de $Q$ calculamos una recta perpendicular al plano $\pi$ y que pase por $Q$, sea $s$ dicha recta

$$s: \left\{ \begin{array}{lrl} x = & 4+ & t \\ y = & - & 2t \\ z = & -1- & t \end{array} \right.$$

Para calcular el punto de corte de $s$ y $\pi$ hacemos
$(4+t) - 2(-2t) - (-1-t) + 1 = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow Q''(3,2,0)$
$Q''$ es el punto medio entre $Q$ y $Q'$, luego

$$Q'' = \frac{Q' + Q}{2} \Longrightarrow Q' = 2Q'' - Q = 2(3,2,0) - (4,0,-1) = (2,4,1)$$

2. La recta que buscamos une los puntos $P'$ y $Q'$ y pasa por ambos puntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P'Q'} = (-1,5,1) \\ P'(3,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \ \ 3 + 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = \ \ \ \ -3t \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{1}$$

**Problema 3** *(3 puntos)*

1. Determinar el centro y el radio de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a $C$ en el punto $P(4,0)$

3. Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $C$ que es tangente a la recta de ecuación $s: 2x - y + 2 = 0$.

**Solución:**

1.

$$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = -4 \\ n = -2b = 2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ r = \sqrt{5} \end{array}\right.$$

La circunferencia tiene de centro $A(2,-1)$ y radio $r = \sqrt{5}$

2. El vector $\overrightarrow{AP} = (2,1)$,y como la recta tangente es perpendicular a él tendrá como vector director $\overrightarrow{u} = (-1,2)$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-1,2) \\ P(4,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = 2t \end{array}\right. \Longrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

3. La circunferencia que buscamos tiene el mismo centro $A(2,-1)$ que la dada, lo único que nos queda por calcular es su radio. Como la recta que nos dan es tangente a la circunferencia, la distacia desde el centro a la recta será el radio que buscamos.

$$d(A,s) = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

La ecuación de la circunferencia será

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{5} \Longrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 20x + 10y - 24 = 0$$