Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(2 puntos)* La recta

$$r:\left\{\begin{array}{rrr} x= & -2+ & 3t\\ y= & 4- & 2t\\ z= & -6+ & 5t \end{array}\right.$$

corta al plano $\pi_1 : x-y-2z=1$ en el punto A y al plano $\pi_2 : x+y-z=0$ en el punto B. Si O es el origen de coordenadas

1. Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2. Hallar el área del triángulo OAB

Solución:
Cálculo del punto A:
Sustituimos r en el plano π_1 y nos queda
$(-2+3t)-(4-2t)-2(-6+5t)=1 \Longrightarrow\ t=1$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x= & -2+ & 3\\ y= & 4- & 2\\ z= & -6+ & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow A(1,2,-1)$$

Cálculo del punto B:
Sustituimos r en el plano π_2 y nos queda
$(-2+3t)-(4-2t)-(-6+5t)=0 \Longrightarrow\ t=2$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x= & -2+ & 6\\ y= & 4- & 4\\ z= & -6+ & 10 \end{array}\right. \Longrightarrow B(4,0,4)$$

1. Cálculo de $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA}=(1,2,-1)-(0,0,0)=(1,2,-1)$$

Cálculo de $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OB}=(4,0,4)-(0,0,0)=(4,0,4)$$

Si α es el ángulo que forman $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tendremos

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{|1\cdot 4+2\cdot 0+(-1)\cdot 4|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{16+0+16}}=0\Longrightarrow\alpha=0$$

Los dos vectores son perpendiculares.

2. Área$=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{2}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{32}}{2}=4\sqrt{3}$

Problema 2 *(3 puntos)* Calcular una recta que pase por el punto $(1,0,1)$ que sea paralela al plano π_1 de ecuación $\pi_1: x-2y+z=1$ y que también sea paralela al plano π_2 que pasa por los puntos de coordenadas $(2,0,1)$, $(0,2,1)$ y $(1,-1,0)$

Solución:

Si r es paralela a π_1 y a π_2 es que es paralela a la intersección de los dos planos.

Calculamos primero el plano π_2:

$$\pi_2=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=(0,2,1)-(2,0,1)=(-2,2,0)\\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)-(2,0,1)=(-1,-1,-1)\\ A(2,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\pi_2:\left|\begin{array}{ccl}-2 & -1 & x-2\\ 2 & -1 & y\\ 0 & -1 & z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow x+y-2z=0$$

La recta s viene definida por la intersección de dos planos

$$s:\left\{\begin{array}{rrrr}x- & 2y+ & z= & 1\\ x+ & y- & 2z= & 0\end{array}\right.$$

Para calcular una recta que sea paralela a s calculamos su vector director.

Vector normal del plano π_1 es $\overrightarrow{v_1}=(1,-2,1)$

Vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{v_2}=(1,1,-2)$

El vector director de la recta s será $\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ producto vectorial.

$$\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\left|\begin{array}{rrr}i & j & k\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{array}\right|=3i+3j+3k=(3,3,3)=3(1,1,1)$$

La recta pedida tiene como vector director $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$ y pasa por el punto $P(1,0,1)$:

$$s:\left\{\begin{array}{ll}x= & 1+t\\ y= & t\\ z= & 1+t\end{array}\right. \Longrightarrow \quad x-1=y=z-1$$

Problema 3 *(2 puntos)* Consideremos un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$, siendo $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,4,1)$ y $E(1,2,7)$. Hallar el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre sus bases.

Solución:

Igualdades:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$$

Área de la base$= |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|$
$\overrightarrow{AB} = (2,1,1) - (1,1,1) = (1,0,0)$
$\overrightarrow{BC} = (2,4,1) - (2,1,1) = (0,3,0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3k = (0,0,3)$$

Área$= |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}| = \sqrt{9} = 3u^2$ El volumen es el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$. Nos falta por calcular $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AE} = (1,2,7) - (1,1,1) = (0,1,6)$

Volumen$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 18u^3$

Ahora sabemos que el volumen es igual al área de la base por la altura del paralelepípedo, luego la altura será igual al cociente entre el volumen y el área de la base, altura$= \dfrac{18}{3} = 6u$

Problema 4 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & -t \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rr} x = & \lambda \\ y = & 2+2\lambda \\ z = & 0 \end{array} \right.$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular, simultánemente a r y a s.

Solución:

1.

$$r := \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \qquad s := \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,2,0) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

2. Sea t la perpendicular común, tendremos que el vector director de t es

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k = (2, -1, 1)$$

Obtenemos r como corte de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 0) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y + z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - y - 5z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} & y+ & z & & = 0 \\ 2x- & y- & 5z & +2 & = 0 \end{cases}$$