Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(2 puntos)* Hallar la ecuación de los planos paralelos al plano $2x + y - z = 2$ y estén a una distancia $d = 3$ de él.

Solución:

Sea el punto $P(x, y, z)$, si este punto está a una distancia $d = 3$ del plano dado debe de cumplir que

$$\frac{|2x + y - z - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 3 \Longrightarrow |2x + y - z - 2| = 3\sqrt{6}$$

Obtendremos dos planos:

$$\pi_1 : 2x+y-z-2 = -3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-2+3\sqrt{6} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z+5.348469228 = 0$$

$$\pi_2 : 2x+y-z-2 = 3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-2-3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-9.348469228 = 0$$

Problema 2 *(3 puntos)* Calcular una recta que sea perpendicular a las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrr} 2x- & y+ & z = 1 \\ x+ & 2y- & z = 2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right| = -i + 3j + 5k = (-1, 3, 5)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3 \\ z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 3, 4)$$

Tenemos, por tanto

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 3, 5) \\ P_s(0, 3, 4) \end{array} \right.$$

La recta t que buscamos será la intersección de dos planos π_1 y π_2. Para encontrarlos buscamos un vector que sea perpendicular a los dos vectores directores de las rectas dadas, es decir, el producto vectorial de ambos vectores

$$\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -8i - 11j + 5k = (-8, -11, 5)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-8, -11, 5) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 3, 5) \\ P_s(0, 3, 4) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-8, -11, 5) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} -8 & -1 & x \\ -11 & 3 & y-3 \\ 5 & 5 & z-4 \end{vmatrix} = -70x - 45y + 13z + 83 = 0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & x-1 \\ -11 & -1 & y \\ 5 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -6x + 2y + 14z + 20 = 0$$

La recta buscada será:

$$h : \left\{ \begin{array}{rrrr} -70x- & 45y+ & 13z+ & 83 = 0 \\ -6x+ & 2y+ & 14z+ & 20 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{lrrrr} \pi_1 : & x- & 2y+ & 3z & -4 = 0 \\ \pi_2 : & 2x+ & y+ & z & +1 = 0 \\ \pi_3 : & -3x+ & y- & 4z & -3 = 0 \end{array}$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -3 \end{array} \right)$$

Tenemos que $|A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

En conclusión $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$, luego no hay soluciones comunes para los tres plano, y tendremos que compararlos dos a dos:

Comparamos π_1 con π_2: $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_1 con π_3: $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_2 con π_3: $\dfrac{2}{-3} \neq \dfrac{1}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

En conclusión, los planos se cortan dos a dos.

Problema 4 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$
$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array} \right.$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.
Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, -2)$

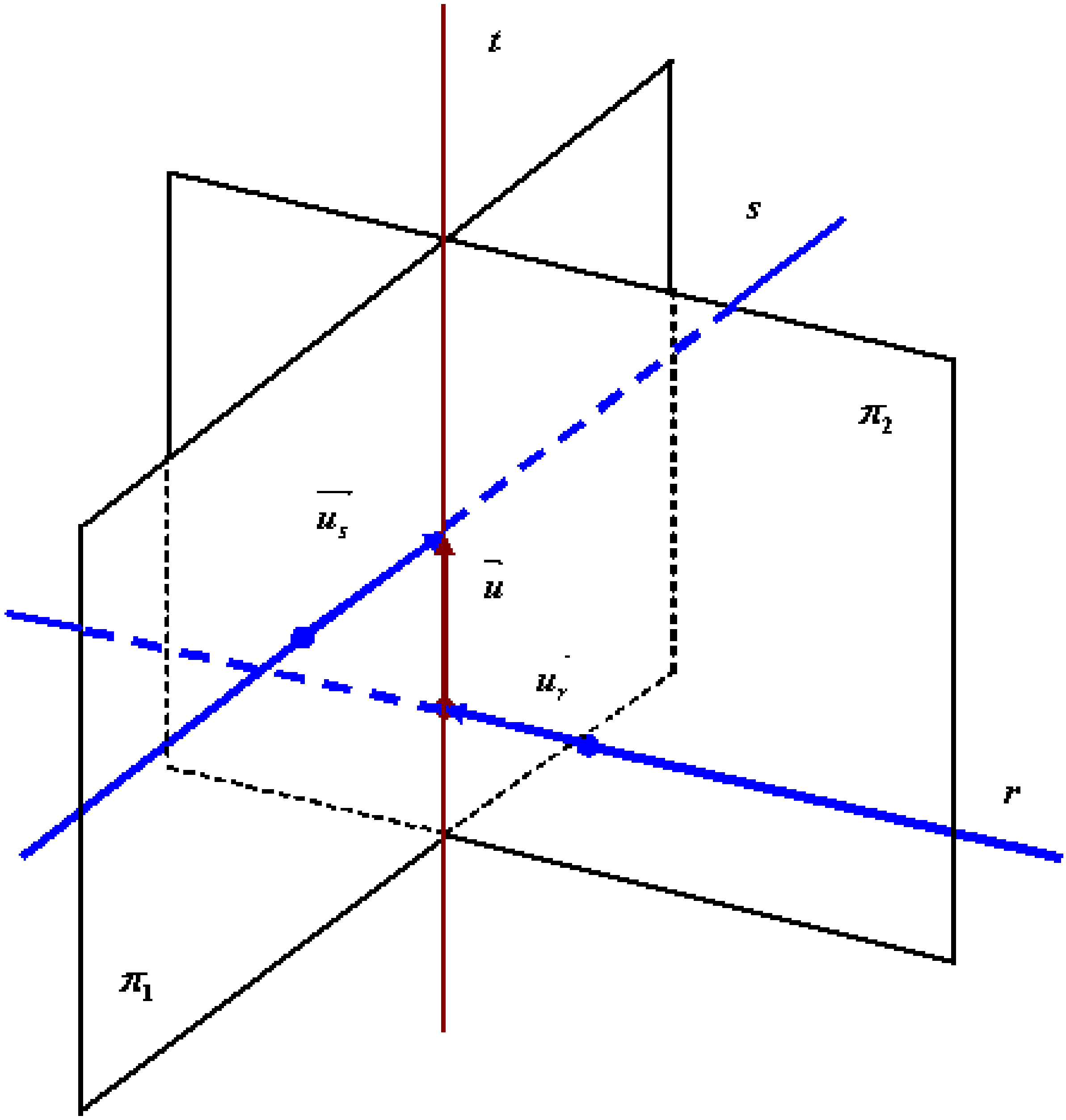
$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

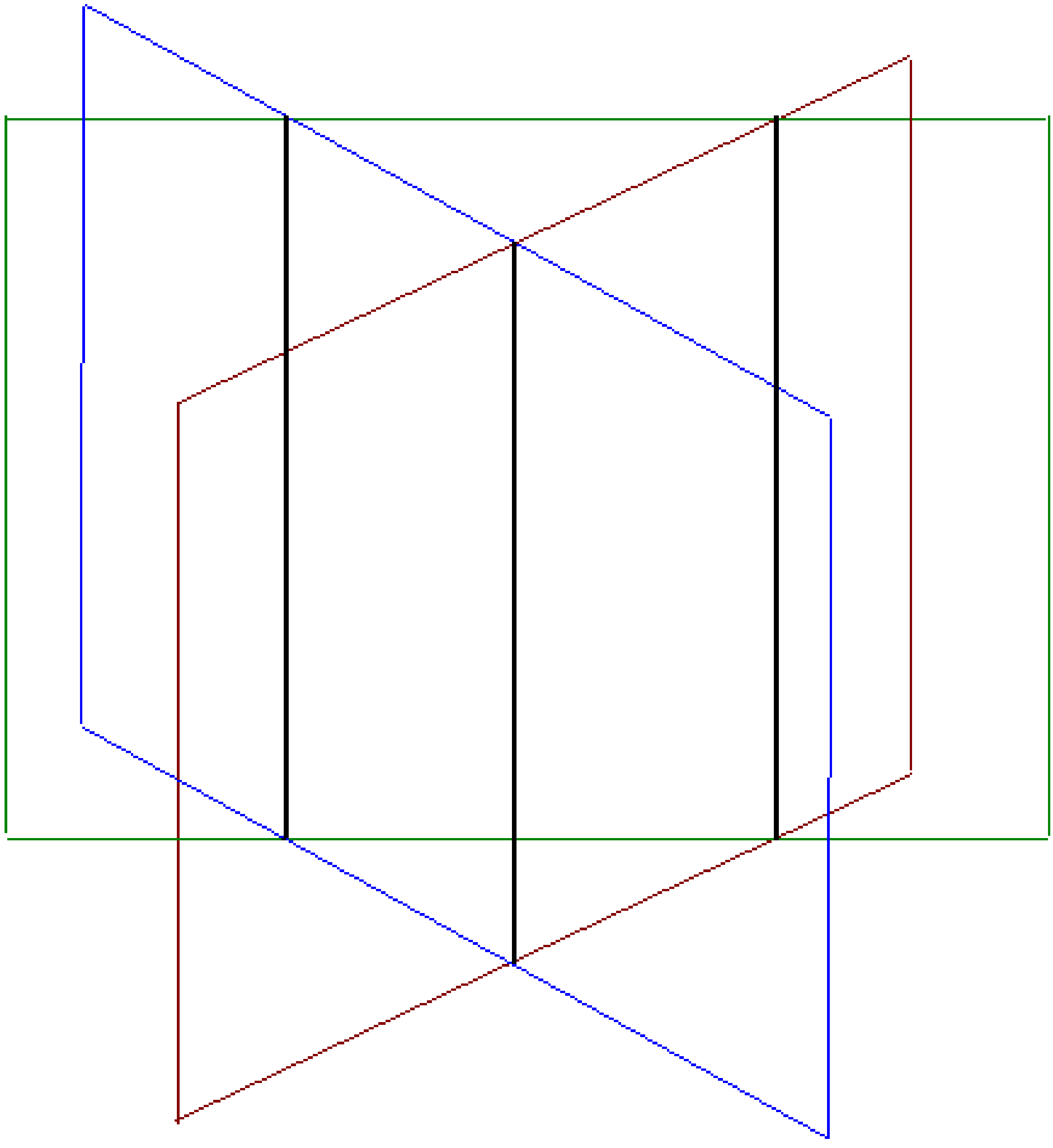
El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

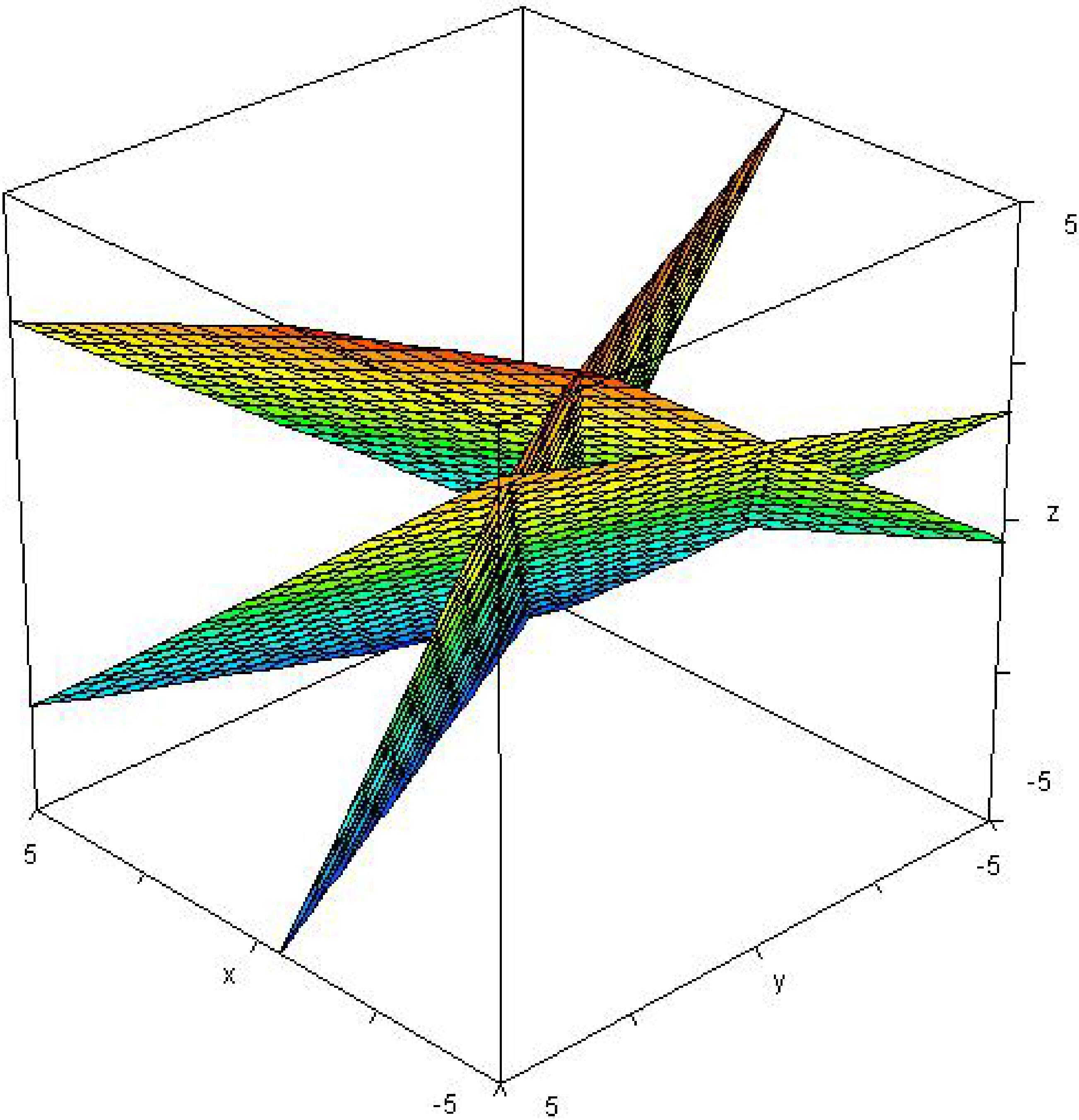
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2-3-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+9+16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos\alpha = 0,8498365855 \Longrightarrow \alpha = 31,80610002^{\circ}$$



t
s
π_2
$\overline{u_s}$
$\overline{u}$
u_r
r
π_1





5
z
-5
5
x
-5
5
y
-5