Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Abril 2003

1. Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = e^{\dfrac{2x}{x^2+1}}$$

(a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

(c) Dibujar la gráfica de f.

Solución:

(a) Calculamos las asíntotas

- **Asíntotas verticales:** No tiene, ya que el dominio de la función es todo R.
- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

(b) Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Que serían los puntos $(1, e)$ y $(-1, e^{-1})$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo y lo mismo ocurre con $e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, el estudio del signo se reduce al de $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$1+x$	$-$	$+$	$+$
$(1-x)(1+x)$	$-$	$+$	$-$
	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(1, e)$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente. En el punto $(-1, e^{-1})$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente.

(c) Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$ único punto de corte, ya que con el eje de abcisa no habría ninguno.

2. Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$$

(a) Calcular el dominio de f.

(b) Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(c) Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.

(d) Dibujar la gráfica de f.

Solución:

(a) **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0, 1\}$

(b) Calculamos las asíntotas

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$

Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$

Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$$

  Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
  Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{9x-3}{x^2-2x}}{x} = 0$$

  Luego no hay asíntotas oblicuas.

(c) Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

  Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2}$$

  Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $3x^2 - 2x + 2$, que es siempre positivo. Luego $f'(x) < 0$ y por tanto la función es siempre decreciente.

(d) Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $y = 0 \Longrightarrow (1/3, 0)$ único punto de corte, ya que con el eje de ordenadas no habría ninguno.

3. Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$$

(a) Calcular el dominio de f.

(b) Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(c) Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.

(d) Dibujar la gráfica de f.

Solución:

(a) **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $\dfrac{x^2-2}{2x-1} < 0$

$$Dom(f) = \left\{ x \in R : \frac{x^2-2}{2x-1} > 0 \right\}$$

(b) Calculamos las asíntotas

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 1/2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1/2} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \pm\infty$$

Luego $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = -\infty$$

Luego $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ son asíntotas verticales.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \infty$$

Luego no tiene asíntotas horizontales.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

(c) Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)} = 0 \Longrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 2)}{(x^2 - 2)(2x - 1)}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del numerador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $(x^2 - 2)(2x - 1)$, que es siempre positivo en este dominio. Luego $f'(x) > 0$ y por tanto la función es siempre creciente.

(d) Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

- Con el eje de ordenadas

$$x = 0 \Longrightarrow y = \ln 2$$

- Los puntos son

$$(0, \ln 2);\ (1 + \sqrt{2}, 0);\ (1 - \sqrt{2}, 0)$$

4. Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

(a) Calcular el dominio de f.

(b) Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(c) Determina los máximos y mínimos de f.

(d) Determina los puntos de inflexión de f.

(e) Dibujar la gráfica de f.

Solución:

(a) **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $x^3 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0\}$

(b) Calculamos las asíntotas

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \pm\infty$$

Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

(c) Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igualamos a cero

$$f'(x) = \frac{3 - x^2}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$$

Para comprobar si son máximos o mínimos recurrimos a la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(\sqrt{3}) < 0 \\ f''(-\sqrt{3}) > 0 \end{array} \right.$$

Tenemos un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

Tenemos un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

(d) Para calcular los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5} = 0 \Longrightarrow x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{6\sqrt{6}}\right) \\ \\ \left(\sqrt{6}, \frac{5}{6\sqrt{6}}\right) \end{array} \right.$$

(e) Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

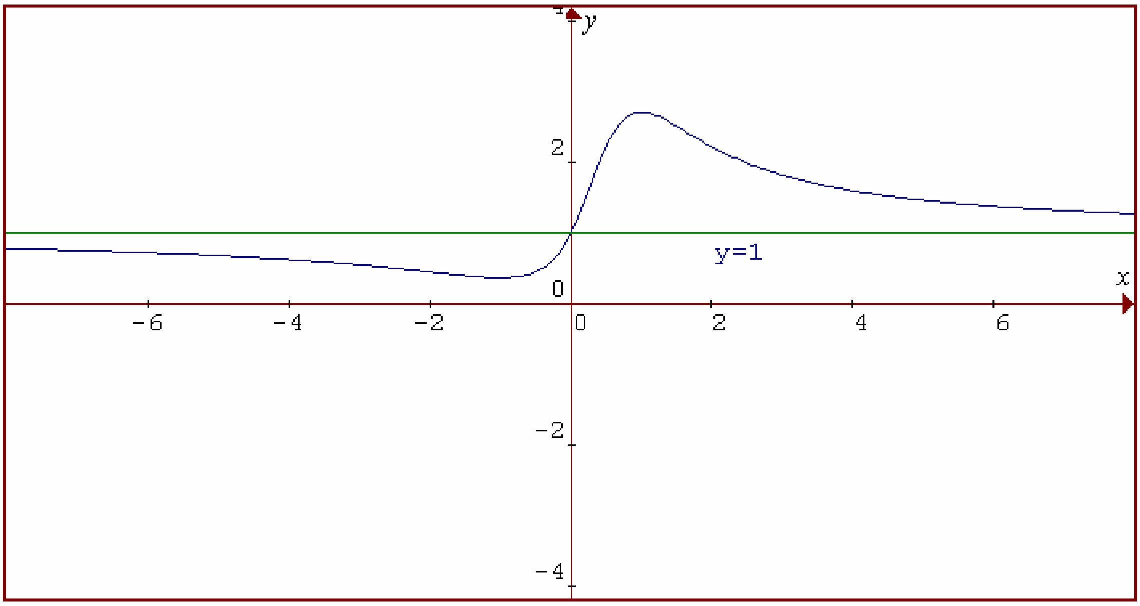
- Con el eje de abcisas

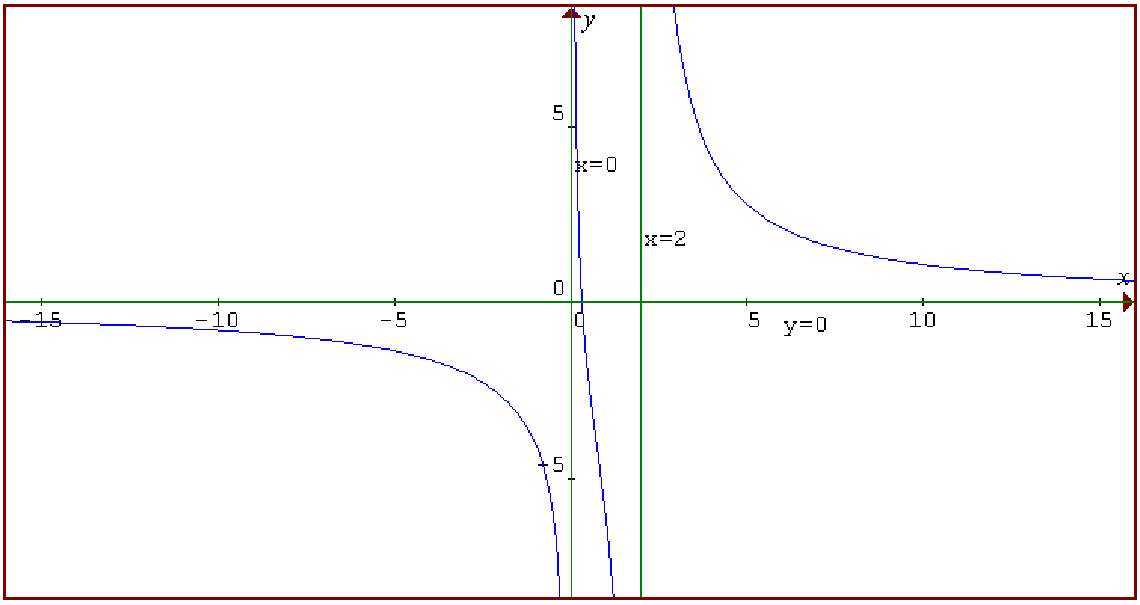
$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

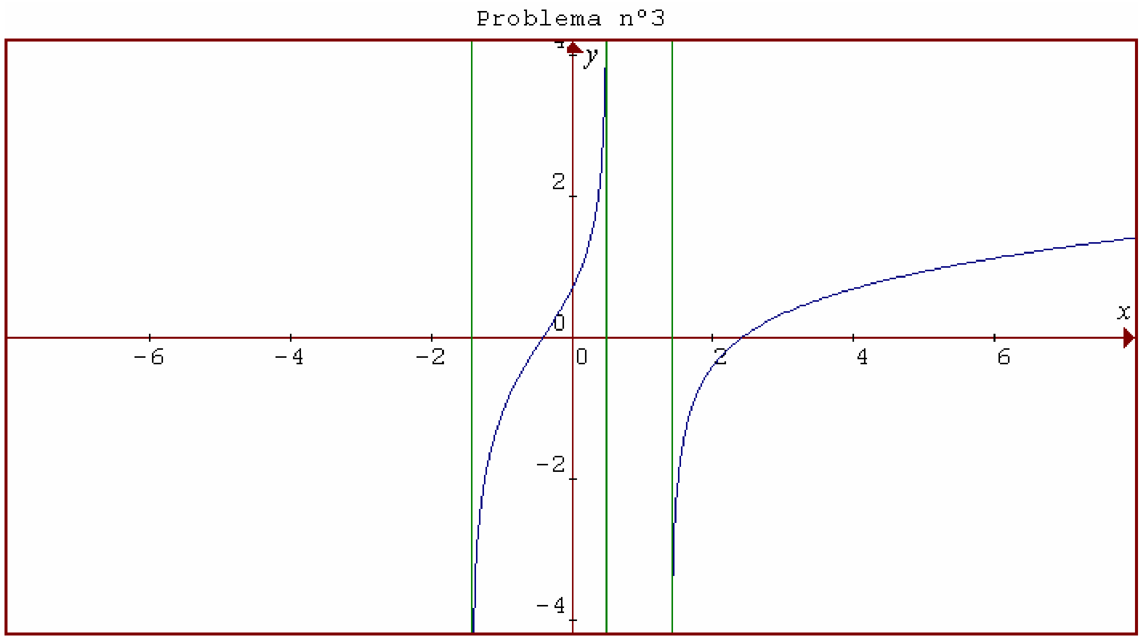
- Con el eje de ordenadas no hay puntos de corte
- Los puntos son

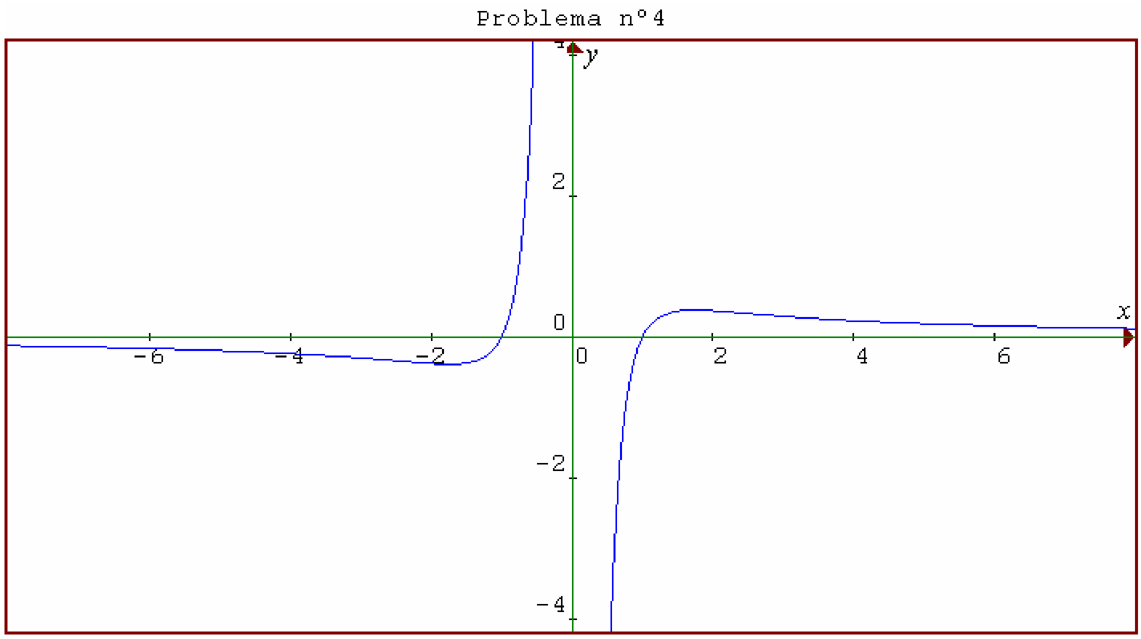
$$(1, 0); \ (-1, 0)$$

Problema nº1






Problema n°3
y
x
2
0
-2
-4
-6
4
6


Problema n°4
y
x
2
0
-2
-4
-6
4
6