# Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

**Abril 2003**

1. Halla los valores de $a$ y de $b$ para que sea derivable y continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

**Solución:**

Tenemos que estudiar la continuidad, y para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que cumplir

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (x^2 + ax + b) = b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$f(0) = b$$

Luego $b = 1$

Si la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en ese punto. Para que sea derivable debe de cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$

Para calcular $f'(0^-)$ calculamos la derivada de la rama correspondiente y sustituimos $x = 0$

$$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(0^-) = a$$

Para calcular $f'(0^+)$ calculamos la derivada de esta rama empleamos límites, hay que tener en cuenta que $f(0) = b = 1$

$$f'(0^+) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{2h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1 - (1+h)}{2h(1+h)} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-h}{2h+2h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-1}{2+4h} = -\frac{1}{2}$$

Para que sea derivable $f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto $b = 1$ y $a = -\dfrac{1}{2}$

2. Calcular

   (a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

   **Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}} = 0$$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1}$

   **Solución:**

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1} =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \left[\frac{2}{\infty}\right]$$

   Observando el límite vemos que

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} = 0 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} \quad \text{no tiene sentido} \end{cases}$$

   Podemos concluir con que el límite no existe.

   (c) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$

   **Solución:**

LLamamos $L = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x} \Longrightarrow \ln L = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \ln(\sin x)^{\tan x}$

$$\lim_{x \longrightarrow \pi/2} \ln(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \tan x \ln(\sin x) = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1/\cos^2 x}{\tan^2 x}} = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{\cos x \tan^2 x}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x \tan^2 x}{-\tan x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \pi/2} -\frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{\cos x} = \lim_{x \longrightarrow \pi/2} (-\cos x \cdot \sin x) = 0$$

Luego tenemos que $\ln L = 0 \Longrightarrow e^0 = L \Longrightarrow L = 1$, es decir, $\lim_{x \longrightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x} = 1$

3. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y $g(x) = \ln(x + 8)$, escribir la función $g \circ f$ y calcular su derivada.

   **Solución:**

$$u = g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)$$

$$u' = \frac{\frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-2/3}(2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} = \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1) + 24\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$$

4. Calcular las funciones derivadas de las siguientes:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x}$

   **Solución:**

$$f'(x) = \frac{6x^2 \cos x - 2x^3(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x^2(3\cos x + x \sin x)}{\cos^2 x}$$

   (b) $g(x) = \frac{2}{3} \ln(5x)$

   **Solución:**

$$g'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5x} = \frac{2}{3x}$$

   (c) $h(x) = \frac{1}{2} e^{5x-3}$

   **Solución:**

$$h'(x) = \frac{1}{2} e^{5x-3} \cdot 5 = \frac{5}{2} e^{5x-3}$$

5. Dada la curva de ecuación $y = -x^2 + 26x$, cálculese la recta tangente a la misma que sea paralela a lña recta de ecuación $y = -x$.

**Solución:**

La recta $y = -x$ tiene de pendiente $m = -1$. La recta tangente a la función tiene que tener esta pendiente que, como sabemos, se obtiene a partir de la primera derivada.

$y' = -2x + 26 = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{27}{2},\ \ y = \dfrac{675}{4}$

La recta pedida pasa por el punto $\left(\dfrac{27}{2}, \dfrac{675}{4}\right)$ y tiene de pendiente $m = -1$, aplicando la ecuación de la recta punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ tenemos que

$$y - \frac{675}{4} = -\left(x - \frac{27}{2}\right) \Longrightarrow x + y = \frac{729}{4}$$