

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2003)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos). Determinar los valores de las constantes A , B , C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A \sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \implies D = 4$$

$$f'(x) = A \cos x + 2Bx + C \text{ como } f'(0) = 0 \implies A + C = 0$$

$$f''(x) = -A \sin x + 2B \implies A = -3, B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3 \sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 2 (2 puntos). Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$5x - 2 = A(x - 2) + B(x - 3)$$

Si $x = 2 \implies 8 = -B \implies B = -8$

Si $x = 3 \implies 13 = A \implies A = 13$. Luego:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{13}{x - 3} - \frac{8}{x - 2}$$

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx = \int dx + 13 \int \frac{1}{x - 3} dx - 8 \int \frac{1}{x - 2} dx =$$

$$x + 13 \ln |x - 3| - 8 \ln |x - 2| = x + \ln \frac{|x - 3|^{13}}{|x - 2|^8}$$

Problema 3 (3 puntos). Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Se pide:

- (1 punto). Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I .
- (1 punto). Expresar M^3 como combinación lineal de M e I .
- (1 punto). Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

a)

$$M^2 - 2M = 3I \implies (M - 2)M = 3I \implies \frac{1}{3}(M - 2)M = I \implies$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2)$$

b)

$$M^2 = 2M + 3I \implies M^3 = (2M + 3I)M =$$

$$2M^2 + 3M = 2(2M + 3I) + 3M = 7M + 6I$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$3I + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2a & 2b \\ 2b & 3 + 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2a & 2b \\ 2b & 3 + 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 + 2a \\ 2ab = 2b \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (3 puntos) Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

- (1,5 punto). Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto del plano π .
- (1,5 punto). Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto de la recta r .

Solución:

- Calculamos una recta perpendicular a π que pase por el punto $M(1, 1, 1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π :

$$(1 + \lambda + (1 + \lambda) - 2(1 - 2\lambda)) = 6 \implies \lambda = 1$$

$$M'(2, 2, -1)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'' :

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \implies M'' = 2M' - M = (4, 4, -2) - (1, 1, 1) = (3, 3, -3)$$

- Calculamos un plano perpendicular a π que contenga al punto M :

$$2x + 3y - z + \lambda = 0 \implies 2 + 3 - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -4$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - (-1 - \lambda) - 4 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{14}$$

$$M' \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'' :

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \implies M'' = 2M' - M = 2 \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right) - (1, 1, 1) =$$
$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7} \right)$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2003)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos). Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a+c \implies c=0 \\ c+d = d \implies c=0 \\ a+b = b+d \implies a=d \end{cases}$$

La matriz buscada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos). Para cada valor del parámetro real k , se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Discutir el sistema según los valores de k .
- b) (1 punto). Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \implies k = 1, \quad k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \implies \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible.

b) Si $k = 1$:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Si $k = 2$:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Se consideran los puntos:

$$A(1, 1, 1), \quad B(0, -2, 2) \quad C(-1, 0, 2) \quad D(2, -1, -2).$$

Se pide:

- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D .
- (1 punto). Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C .
- Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C .

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (1, -2, -3)$$

a)

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{5}{2} u^3$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \\ A(1, 1, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ -3 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$2x + y + 5z - 8 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|4 - 1 - 10 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{2} u$$

c)

$$r = \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ D(2, -1, -2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

- (1 punto). Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- (0,5 puntos). Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.
- (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.
- (1 punto). Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

Solución:

a) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \right) = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty, -1/2)$ y decreciente en $(-1/2, \infty)$.
Luego en el punto $(-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4})$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} =$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} = 0$$

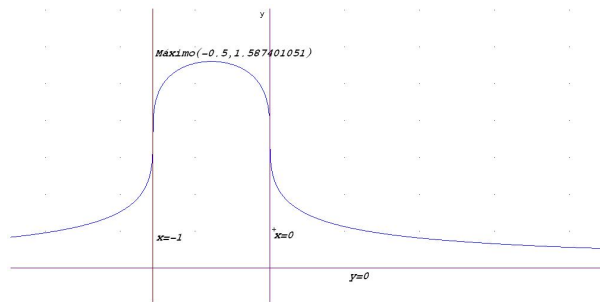
Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- Oblicuas: No hay

b)

$$f'(a) = \infty \implies \sqrt[3]{a^2(a+1)^2} = 0 \implies a = 0, \quad a = -1$$

c) Representación gráfica



d)

$$\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) dx = \left[\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} u^2$$