Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

3 de Septiembre de 2002

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Hallar A^n para todo entero positivo n.
2. Calcular, si existe, la inversa de la matrtiz A y la de la matriz $I_3 + A$.

Solución:

1. Calculamos las potencias de A:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

Es decir:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 1 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 2 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n \geq 3 \end{cases}$$

2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A| = 0$, y por tanto A no tiene inversa. Por otro lado:

$$|A + I_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow |A + I_3| = 1$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A + I_3| \neq 0$, y por tanto tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sean r la recta determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$ y s la recta de ecuaciones: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$.
Se pide:

1. Su posición relativa.
2. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C = (1, 2, 4)$ y que corte a las rectas r y s.

Solución:

1. La recta r pasa por los puntos A y B, para construirla calculamos el vector director de ella $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$
   Vamos a escribir las dos rectas en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

   Los vectores directores de ambas rectas no son paralelos, $\overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0)$ y $\overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3)$. Lo que quiere decir que, o bien se cortan o bien se cruzan. Vamos a resolverlo mediante un sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 3 + 2\lambda = 1 & (1) \\ 5\lambda = -1 - t & (2) \\ 3\lambda = -1 & (3) \end{array}\right\} \text{Despejando } \lambda \text{ de (1) y (3) tenemos:}$$

   De (1) $\Longrightarrow$ $\lambda = -1$

   De (3) $\Longrightarrow$ $\lambda = -\frac{1}{3}$

   Como los dos valores de λ son diferentes, concluimos con que las dos rectas se cruzan.

2. Si construimos el plano π_1 determinado por la recta r y el punto C, y construimos el plano π_2 determinado por la recta s y el punto C. Por tanto, la recta pedida sería la intersección de estos dos planos.

   - Calculamos π_1:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AC} = (0, 2, 5) \\ A(1, 0, -1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow -5(x-1) = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x-1 = 0$$

   - Calculamos π_2:

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{PC} = (-2, 2, 4) \\ P(3, 0, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x - y + z - 3 = 0$$

   Ahora resolvemos el sistema formado por ambos planos, para comprobar que se trata de una recta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = x + z - 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

   Que sería la recta que nos piden.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Hallar todas las funciones f cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

indicando el dominio de definición de éstas.
Solución:

- Tenemos que calcular las primitivas de $f'(x)$, como el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, primero dividimos los dos polinomios:

$$\begin{array}{rl} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 & \underline{|x^2 + x} \\ \underline{-x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad} & x^2 - x + 1 \\ -x^3 + 0x^2 + x + 1 & \\ \underline{+x^3 + x^2 \qquad\quad} & \\ x^2 + x + 1 & \\ \underline{-x^2 - x \quad\;\;} & \\ 1 & \end{array}$$

Tenemos, por tanto, que calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \int \left(x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x}\right)dx = \int (x^2-x+1)dx + \int \frac{dx}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

Tendremos que calcular esta última integral, lo haremos por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}\right.$$

Luego tendremos:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \ln(x+1) + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C$$

- Ahora calculamos el dominio de estas funciones:
  Como tenemos un logaritmo neperiano podremos decir que el dominio D de esta función sería: $D = \{x \in R \text{ tales que } \frac{x}{x+1} > 0 \text{ y } x \neq -1\}$
  Para hallar esta región tenemos que estudiar el signo de $\frac{x}{x+1}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
signo x	$-$	$-$	$+$
signo $(x+1)$	$-$	$+$	$+$
signo $\frac{x}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

En conclusión, tendremos que el dominio será:

$$\boxed{D = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva

$$y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se pide:

1. Dominio de definición.
2. Simetría.
3. Cortes a los ejes.
4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Representación aproximada.

Solución:

1. El dominio será toda la recta real, excepto en aquellos puntos el los que se anula el denominador, dicho de otra manera será $D = \{x \in R;\ x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x)$
   Luego la función es par, y por tanto simétrica respecto al eje Y.
3. Con el eje X hacemos $y = 0$ y nos queda:
   $0 = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Longrightarrow\ x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje X.
   Con el eje Y hacemos $x = 0$ y nos queda:
   $f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.
4. Asíntotas:
   - Verticales:
     $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = 2$ es una asíntota vertical

     $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = -2$ es una asíntota vertical
   - Horizontales:
     $y = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 \Longrightarrow\ y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - Oblicuas:
     $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, entoces $a = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 3}{x(x^2 - 4)} = 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas oblicuas.
5. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos la primera derivada:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$

Para que exista un punto crítico imponemos que $y' = 0$ y nos queda:

$$\frac{14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow 14x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Analizamos el signo de y':

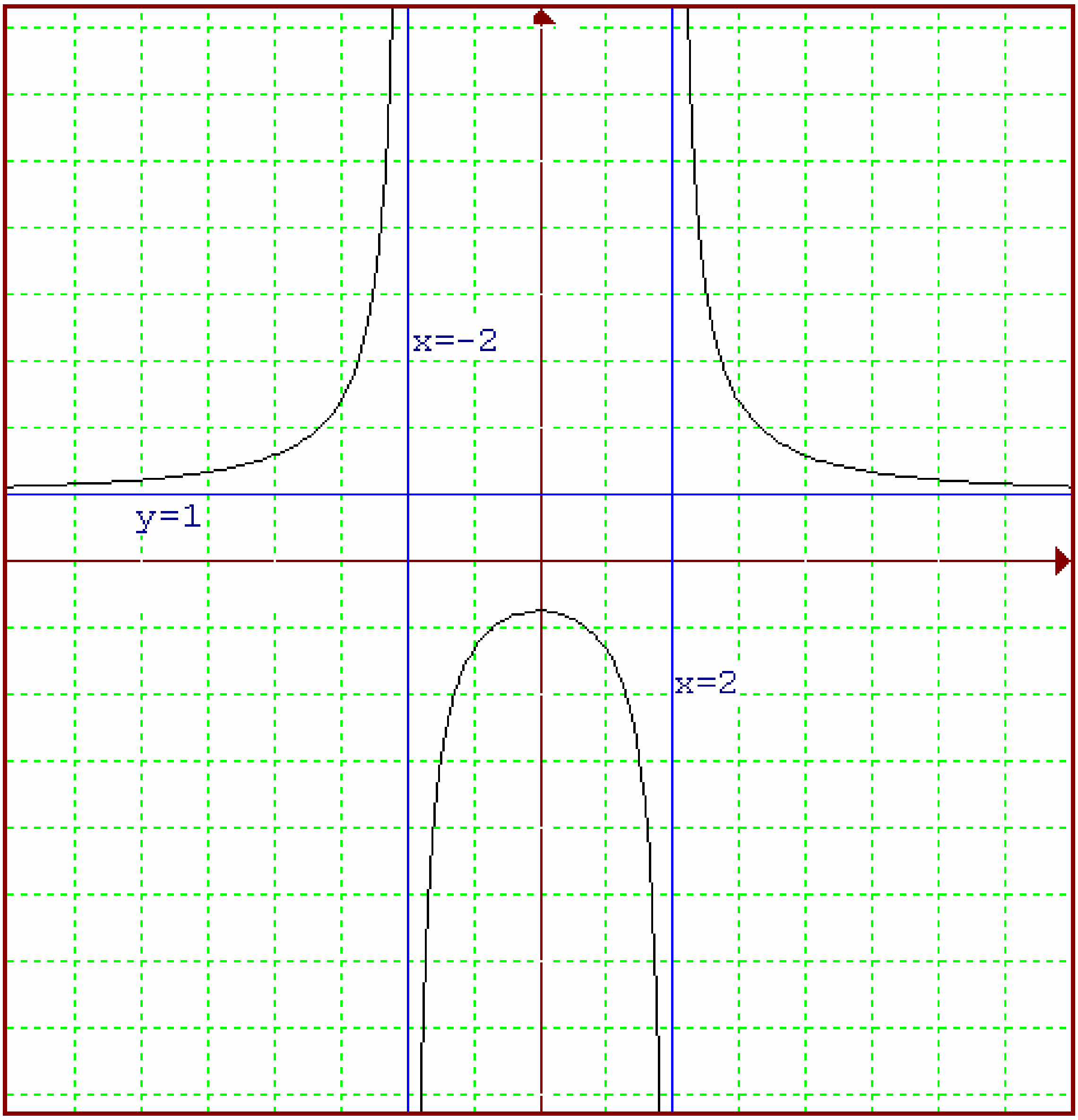
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
signo y'	$+$	$+$	$-$	$-$
y	**creciente**	**creciente**	**decreciente**	**decreciente**

En resumen:

- La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- La función decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

6. Observamos que en el punto de abcisa $x = 0$ la curva pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, en el punto $\left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$ tiene un máximo.

7. Representación gráfica:


x=-2
y=1
x=2