

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Marzo 2002

Problema 1 (4 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-\alpha}{-1}$$

$$s : \frac{x+1}{3} = y-2 = z$$

1. Analizar en función de α la posición relativa de las dos rectas.
2. Para $\alpha = 14$ escribir la ecuación del plano π que contiene a ambas rectas.
3. Hallar la perpendicular común a las rectas s y t siendo t la siguiente recta:

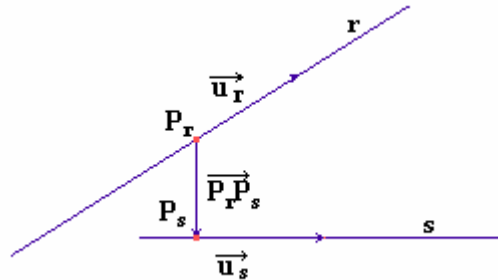
$$t : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$$

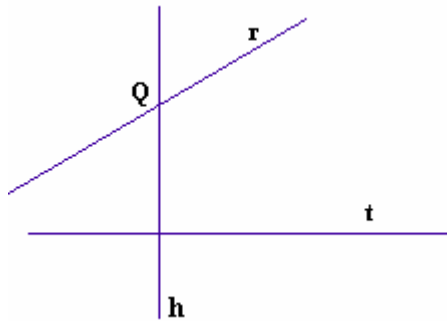
Solución:

$$r : \begin{cases} P_r(1, 0, \alpha) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} P_s(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases}$$

1. Vamos a ver para que valores de α los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha - 14 = 0 \implies \alpha = 14$$





Si $\alpha \neq 14$ el determinante es distinto de cero, lo que quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes, y por tanto, las dos rectas se cruzan.

Si $\alpha = 14$ el determinante es cero y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ esto quiere decir que $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes, y por tanto, $\overrightarrow{P_r P_s}$ depende linealmente de $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, en conclusión las rectas r y s se cortan.

2. Replanteamos datos:

$$t: \begin{cases} P_t(0, 0, 0) \\ \vec{v}_t = (1, 2, -2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_s P_t} = (1, -2, 0)$$

Veamos que posición relativa tienen s y t :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \implies \text{las dos rectas se cruzan.}$$

Tenemos que calcular la recta h perpendicular común a s y t , es decir, una recta cuyo vector director vendría determinado por:

$$\vec{v}_h = \vec{v}_s \times \vec{v}_t$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 7, 5)$$

Ahora hallamos el plano π , que conteniendo a t es perpendicular a la recta s . Este plano y la recta s se cortarán en un punto Q .

Para construir π tenemos:

$$\begin{cases} \vec{v}_h = (-4, 7, 5) \\ \vec{v}_t = (1, 2, -2) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} -4 & 1 & x-0 \\ 7 & 2 & y-0 \\ 5 & -2 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 8x + y + 5z = 0; \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora busquemos el punto de corte:

$$8(-1 + 3\lambda) + (2 + \lambda) + 5\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{5}$$

$$\text{Luego el punto } Q \text{ será: } \begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{1}{5} \\ y = 2 + \frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{Es decir: } Q(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5})$$

$$\text{Tenemos por tanto: } h = \begin{cases} Q(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5}) \\ \vec{v}_h = (-4, 7, 5) \end{cases}$$

Por lo que concluiremos:

$$h : \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 4 \cdot \lambda \\ y = \frac{11}{5} + 7 \cdot \lambda \\ z = \frac{1}{5} + 5 \cdot \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (4 puntos) Se considera la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi : x + y + z - 1 = 0$$

Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único este punto?. Contestar razonadamente.

Solución:

LLamaríamos $O(0,0,0)$ al origen de coordenadas, y $P(x,y,z)$ a un punto que por estar sobre la recta r tendría de coordenadas $P(2t,t,0)$; aplicando las fórmulas de distancia a un plano, y distancia a otro punto tendremos:

$$d(O, P) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = \sqrt{4t^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2t \cdot 1 + t \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Como } d(O, P) = d(P, \pi) \implies t\sqrt{5} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \implies$$

$$\begin{cases} t\sqrt{5} = \frac{3t-1}{\sqrt{3}} & \implies t = \frac{1}{3-\sqrt{15}} \\ t\sqrt{5} = -\frac{3t-1}{\sqrt{3}} & \implies t = \frac{1}{3+\sqrt{15}} \end{cases}$$

Sustituyendo t en r se obtienen los puntos pedidos:

$$P\left(\frac{2}{3-\sqrt{15}}, \frac{1}{3-\sqrt{15}}, 0\right) \text{ y } P'\left(\frac{2}{3+\sqrt{15}}, \frac{1}{3+\sqrt{15}}, 0\right)$$

Esta claro que el punto no es único, ya que como hemos visto son dos los que cumplen la condición del problema.

Problema 3 (2 puntos) Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por:

$$r_1 : \begin{cases} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & 3y+ & z = & 1 \end{cases} \quad r_2 =: \begin{cases} x = & 3t \\ y = & 1- & 2t \\ z = & 2+ & t \end{cases}$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi = x - 3y - 2z + 7 = 0$

Solución

Hallamos el punto de corte entre π y r_2 por simple sustitución, es decir, $3t - 3(1 - 2t) - 2(2 + t) + 7 = 0 \implies t = 0$ y sustituyendo ahora este valor en r_2 obtendríamos el punto $P(0, 1, 2)$.

Ahora vamos a pasar la recta r_1 a paramétricas:

$$\begin{aligned} r_1 : \begin{cases} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & 3y+ & z = & 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} x+ & y = & 2t \\ 2x- & 3y = & 1-t \end{cases} \implies \\ \begin{cases} 2x+2y = & 4t \\ 2x-3y = & 1-t \end{cases} &\implies 5y = 5t - 1 \implies y = \frac{5t-1}{5} \\ x = 2t - \frac{5t-1}{5} = \frac{5t+1}{5} \end{aligned}$$

Nos quedaría:

$$r_1 : \begin{cases} x = & \frac{1}{5} & +t \\ y = & -\frac{1}{5} & +t \\ z = & & t \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} \vec{u} = (1, 1, 1) \\ P_r(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0) \end{cases}$$

Calculamos ahora $\overrightarrow{P_r P} = (0 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 - 0) = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2)$.

El plano buscado lo obtendríamos con los siguientes datos:

$$\begin{cases} P(0, 1, 2) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r P} = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & x-0 \\ 1 & \frac{6}{5} & y-1 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$