Problemas de 1ºBachillerato

Isaac Musat Hervás

20 de julio de 2005

Índice General

Capítulo 1

Problemas de Álgebra

1.1 Números Reales

1.1.1 Ecuaciones Racionales

Problema 1 Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{2-x} = 4$$

Solución:

$$(\sqrt{x+6})^2 = (4 - \sqrt{2-x})^2$$
$$x + 6 = 16 + (\sqrt{2-x})^2 - 8\sqrt{2-x}$$
$$2x - 12 = -8\sqrt{2-x}$$
$$x - 6 = -4\sqrt{2-x}$$
$$(x-6)^2 = (-4\sqrt{2-x})^2$$
$$x^2 + 36 - 12x = 16(2-x)$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2 \ \textit{doble}$$

Problema 2 Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$$

Solución:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$$
$$x - 1 = 4 + (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}$$
$$x - x - 1 - 4 = -4\sqrt{x}$$

$$-5 = -4\sqrt{x}$$
$$(-5)^2 = (-4\sqrt{x})^2$$
$$25 = 16x \Longrightarrow x = \frac{25}{16}$$

Problema 3 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$$

Solución:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7 \Longrightarrow \sqrt{x+7} = 7 - \sqrt{x} \Longrightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (7 - \sqrt{x})^2 \Longrightarrow$$
$$x + 7 = 49 + x - 14\sqrt{x} \Longrightarrow -42 = -14\sqrt{x} \Longrightarrow 3 = \sqrt{x} \Longrightarrow x = 9$$

Problema 4 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 3$$

Solución:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 3 \Longrightarrow \sqrt{x+6} = 3 - \sqrt{x} \Longrightarrow (\sqrt{x+6})^2 = (3 - \sqrt{x})^2 \Longrightarrow$$
$$x + 6 = 9 + x - 6\sqrt{x} \Longrightarrow -3 = -6\sqrt{x} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Problema 5 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

Solución:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-1} \Longrightarrow$$
$$x + 1 = 1 + (x-1) - 2\sqrt{x-1} \Longrightarrow 1 = \sqrt{x-1} \Longrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Problema 6 Calcular:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

Solución:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow x = \frac{5}{4}$$

1.1.2 Ecuaciones Exponenciales

Problema 7 Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4}\cdot 9^{2x+3}=27^{x-1}$$

Solución:

$$3^{x^2+5x-4}\cdot 3^{2(2x+3)}=3^{3(x-1)}$$
$$3^{x^2+5x-4+2(2x+3)}=3^{3(x-1)}$$
$$x^2+5x-4+4x+6=3x-3$$
$$x^2+6x+5=0\Longrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{4}$$
$$x=\frac{-6\pm 4}{2}\Longrightarrow x=-1,\ x=-5$$

Problema 8 Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4}\cdot 9^{2x+3}=27^{x-1}$$

Solución:

$$3^{x^2+5x-4}\cdot 3^{2(2x+3)}=3^{3(x-1)}$$
$$3^{x^2+5x-4+2(2x+3)}=3^{3(x-1)}$$
$$x^2+5x-4+4x+6=3x-3$$
$$x^2+6x+5=0\Longrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{4}$$
$$x=\frac{-6\pm 4}{2}\Longrightarrow x=-1,\ x=-5$$

Problema 9 Calcular

$$2\cdot 3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0$$

Solución:

$$2\cdot 3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0\Longrightarrow\frac{2\cdot 3^{2x}}{3}+3\cdot 3^{x}-1=0\Longrightarrow 2\cdot 3^{2x}+9\cdot 3^{x}-3=0$$

Haciendo el cambio de variables $u=3^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$2u^2+9u-3=0\Longrightarrow u=0,3117376914,\ \ u=-4,811737691$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,3117376914=3^x\Longrightarrow\log 0,3117376914=\log 3^x\Longrightarrow$$
$$x\log 3=\log 0,3117376914\Longrightarrow$$
$$x=\frac{\log 0,3117376914}{\log 3}=-1,060968632$$

En el otro caso, $u=-4,811737691=3^x$ no es posible obtener solución.

1.1.3 Ecuaciones Logarítmicas

Problema 10 Halla las soluciones de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

Solución:

$$\log(3x^2 - 2) = \log 10 + \log(x - 1)$$

$$\log(3x^2 - 2) = \log 10(x - 1)$$

$$3x^2 - 2 = 10(x - 1)$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm 2}{6} \Longrightarrow x = 2, \ \ x = \frac{4}{3}$$

Problema 11 Halla las soluciones de:

$$\log(x^2 + 6x + 7) = 1 + \log(x + 1)$$

Solución:

$$\log(x^2 + 6x + 7) = \log 10 + log(x + 1)$$

$$\log(x^2 + 6x + 7) = \log 10(x + 1)$$

$$x^2 + 6x + 7 = 10(x + 1)$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3, \ \ x = 1$$

Problema 12 Hallar las soluciones reales de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

Solución:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1) \Longrightarrow \log(3x^2 - 2) = \log 10 + \log(x - 1) \Longrightarrow$$

$$\log(3x^2 - 2) = \log 10(x - 1) \Longrightarrow (3x^2 - 2) = 10(x - 1) \Longrightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Problema 13 Hallar las soluciones reales de:

$$\log(x^2 + 2699) = 2 + \log(x + 2)$$

Solución:

$$\log(x^2 + 2699) = 2 + \lg(x + 2) \Longrightarrow \log(x^2 + 2699) = \log 100 + \log(x + 2) \Longrightarrow$$

$$\log(x^2 + 2699) = \log 100(x + 2) \Longrightarrow (x^2 + 2699) = 100(x + 2) \Longrightarrow$$

$$x^2 - 100x + 2499 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 51 \\ x = 49 \end{cases}$$

Problema 14 Calcular

$$\log(x^2 - 1) + 2 = 1 + 2\log(x + 1)$$

Solución:

$$\log(x^2 - 1) + 2 = 1 + 2\log(x + 1) \Longrightarrow \log(x^2 - 1) + 1 = 2\lg(x + 1) \Longrightarrow$$

$$\lg 10(x^2 - 1) = \lg(x + 1)^2 \Longrightarrow 10(x^2 - 1) = (x + 1)^2 \Longrightarrow 9x^2 - 2x - 11 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{11}{9} \end{cases}$$

La solución $x = -1$ no es válida.

Problema 15 Calcular:

1. $\log(x^2 + 2) - \log x = 1$
2. $4^{x-1} + 2^x - 1 = 0$

Solución:

1. $\log(x^2 + 2) - \log x = 1 \Longrightarrow x = 0,2041684766, \quad x = 9,795831523$
2. $4^{x-1} + 2^x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -0,2715533031$

1.1.4 Sistemas de Ecuaciones Lineales con tres Incógnitas

Problema 16 Resolver por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y- & z=2 \\ 2x+ & y+ & z=3 \\ 2x- & y- & 2z=2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y- & z=2 \\ 2x+ & y+ & z=3 \\ 2x- & y- & 2z=2 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{(E_2-2E_1)\\(E_3-2E_1)}} \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y- & z= & 2 \\ & 3y+ & 3z= & -1 \\ & y & = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rr} x= & \frac{5}{3} \\ y= & -2 \\ z= & \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Problema 17 Resolver por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y+ & z=1 \\ 2x+ & 2y- & z=0 \\ 3x- & 3y+ & z=2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y+ & z=1 \\ 2x+ & 2y- & z=0 \\ 3x- & 3y+ & z=2 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{(E_2-2E_1)\\(E_3-3E_1)}} \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & 1 \\ & 6y- & 3z= & -2 \\ & 3y- & 2z= & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{(2E_3-E_2)}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & 1 \\ & 6y- & 3z= & -2 \\ & - & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & \frac{1}{3} \\ y= & -\frac{1}{3} \\ z= & 0 \end{array}\right.$$

Problema 18 Resolver por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 1 \\ 2x+ & y+ & z= & 3 \\ 2x- & 2y- & z= & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 1 \\ 2x+ & y+ & z= & 3 \\ 2x- & 2y- & z= & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{(E_2-2E_1)\\(E_3-2E_1)}} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 1 \\ - & y- & 3z= & 1 \\ - & 4y- & 5z= & -3 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_3-4E_2)}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z= & 1 \\ - & y- & 3z= & 1 \\ & & 7z= & -7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 1 \\ y= & 2 \\ z= & -1 \end{array}\right.$$

Problema 19 Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & y+ & 2z=1 \\ x+ & y- & z=3 \\ 3x+ & 2y+ & z=5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & y+ & 2z=1 \\ x+ & y- & z=3 \\ 3x+ & 2y+ & z=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{13}{8} \\ \\ y=\dfrac{1}{2} \\ \\ z=-\dfrac{7}{8} \end{array}\right.$$

1.1.5 Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Problema 20 Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y= & 5 \\ & xy= & 2 \end{array}\right.$$

Solución:
Primero despejamos y en la primera ecuación $y = 5 - 2x$, y sustituimos en la segunda $x(5-2x) = 2 \Longrightarrow 5x - 2x^2 = 2 \Longrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $x = \frac{1}{2}$.
Cuando $x = 2$ tendremos $2y = 2 \Longrightarrow y = 1$.
Cuando $x = \frac{1}{2}$ tendremos $\frac{y}{2} = 2 \Longrightarrow y = 4$.

Problema 21 Calcular:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-2y^2=1 \\ x+y=2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-2y^2=1 \\ x+y=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\sqrt{7}+4=6.645751311 \\ y_1=-\sqrt{7}-2=-4.645751311 \\ x_2=4-\sqrt{7}=1.354248688 \\ y_2=\sqrt{7}-2=0.6457513110 \end{array}\right.$$

1.1.6 Inecuaciones

Problema 22 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} > 0$$

2.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \leq 0$$

Solución:

1.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)} > 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-1, 2) \cup (3, +\infty)$$

2.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \leq 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x-1)(x+2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty, -2] \cup (-1, 1]$$

Problema 23 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3} < 0$$

2.

$$\frac{x^2+2x-3}{x-5} \geq 0$$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+3x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)} < 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x+1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-2) \cup (-1,3)$$

2.

$$\frac{x^2+2x-3}{x-5} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-5} \geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,5)$	$(5,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-1)}{x-5}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-3,1] \cup (5,+\infty]$$

Problema 24 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x+2} \geq 0$$

2.

$$\frac{x-1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x+2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-2,-1] \cup [3,+\infty)$$

2.

$$\frac{x-1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

$$3x - 3 - 18x \geq 10x + 30 \Longrightarrow -25x \geq 33 \Longrightarrow x \leq -\frac{33}{25}$$

$$\left(-\infty, -\frac{33}{25}\right)$$

Problema 25 Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1} \leq 0, \quad \frac{x-1}{x^2+3x+2} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1} \leq 0 \Longrightarrow (-\infty,-3] \cup (1,5]$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2} \geq 0 \Longrightarrow (-2,-1) \cup [1,\infty)$$

1.2 Polinomios

1.2.1 Descomposición Polinómica

Problema 26 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$
   Solución:

$$P(x) = (x-2)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

2. $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
   Solución:

$$Q(x) = (x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})$$

Problema 27 Descompón el siguiente polinomio como producto de factores de grado uno:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$$

Solución:

$$P(x) = (x-1)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Problema 28 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
3. $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = x(x-3)(x+1)(x-1)$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x-1)(x+3)(x-3)$
3. $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = (x+5)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

Problema 29 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$
3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)(x+1)$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x-5)(x-1)(x+1)$
3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = (x-3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

1.2.2 Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

Problema 30 Calcula el MCD y el mcm de los siguientes polinomios

$$P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6$$

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18$$

Solución: $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6 = (x-1)^2(x+3)(x^2-2)$

$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18 = (x-1)(x+3)^2(x^2-2)$

$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)(x+3)(x^2-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$

$$\begin{aligned} mcm(P(x), Q(x)) &= (x-1)^2(x+3)^2(x^2-2) = \\ &= x^6 + 4x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + 24x - 18 \end{aligned}$$

1.2.3 Ecuaciones Polinómicas

Problema 31 Calcular las soluciones reales de:

1. $$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{3x-7}{2x-5}$$

   Solución:

   $$\begin{gathered} (2x-3)\cdot(2x-5) = (x-1)\cdot(3x-7) \\ 4x^2 - 10x - 6x + 15 = 3x^2 - 7x - 3x + 7 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Longrightarrow x = 4,\ x = 2 \end{gathered}$$

2. $$\frac{2+x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

   Solución:

   $$\begin{gathered} (2+x)\cdot(x^2-x) = (2-x)\cdot(x^2+x) \\ 2x^2 - 2x + x^3 - x^2 = 2x^2 + 2x - x^3 - x^2 \\ 2x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x\cdot(2x^2-4) = 0 \Longrightarrow \end{gathered}$$

$$x = 0 \text{ (No sería una solución lógica)}$$

$$2x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Problema 32 Calcular x en la siguiente ecuación

$$\frac{2x}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2 - 2x - 3}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 3 & = (x-3)(x-1) \\ x^2 - 1 & = (x+1)(x-1) \\ x^2 - 2x - 3 & = (x-3)(x+1) \end{array}\right. \Longrightarrow mcm = (x+1)(x-1)(x-3)$$

$$2x(x+1) - (x-1)(x-3) = 2(x-1) \Longrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 + \sqrt{5} \\ x = -2 - \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Problema 33 Calcular las soluciones reales de:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Solución:

$$(x-1)\cdot(x+1) = (x^2-1)\cdot(x-1)$$

$$x^2 - 1 = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Por Ruffini: $x = 2$, $x = 1$, $x = -1$, pero estas dos últimas soluciones no serían lógicas, ya que anulan el denominador de alguna de las fracciones.

Problema 34 Resolver:

1. $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3x + 9 = 0$
2. $\dfrac{x+1}{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{x}{x-1}$

Solución:

1. $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3x + 9 = 0 \Longrightarrow x = -3,\ x = \pm 1,\ x = \pm\sqrt{3}$
2. $\dfrac{x+1}{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{x}{x-1} \Longrightarrow x = -5{,}372281323, \quad x = 0{,}3722813232$

Capítulo 2

Problemas de Geometría

2.1 Trigonometría

2.1.1 Razones Trigonométricas

Problema 35 Sabiendo que $\tan\alpha = 2$, calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que α pertenece al tercer cuadrante.
Solución:
$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Sabemos que $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y aplicando esta fórmula quedaría:
$2^2 + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec = \pm\sqrt{5} = \pm 2,24$. Como en el tercer cuadrante la secante es negativa concluimos con el resultado $\sec\alpha = -2,24$.

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ podemos despejar $\cos\alpha$ y nos quedaría $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2.24} = -0,45$, es decir $\cos\alpha = -0,45$.

Ahora vamos a utilizar la fórmula $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$ y tendríamos:
$1 + \frac{1}{4} = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm 1,12$. Como en el tercer cuadrante la cosecante es negativa será $\csc\alpha = -1,12$.

Como $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{1}{-1{,}12} = -0,89$ es decir
$\sin\alpha = -0,89$

Problema 36 Teniendo en cuenta que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^{o});\ \ \sin(\alpha + 45^{o});\ \ \cos(\alpha - 60^{o});\ \ \tan(60^{o} - \alpha)$$

Solución:
Se calcula primero $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$:
$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3};\quad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\sin(\alpha+30^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 30^{o}+\cos\alpha\cdot\sin 30^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{6} = 0,7601$

$\sin(\alpha + 45^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 45^{o} + \cos\alpha\cdot\sin 45^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,9024$

$\cos(\alpha - 60^{o}) = \cos\alpha\cdot\cos 60^{o} + \sin\alpha\cdot\sin 60^{o} = \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,7601$

$\tan(60^{o} - \alpha) = \frac{\tan 60^{o}-\tan\alpha}{1+\tan 60^{o}\cdot\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{8}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} = 0,8549$

Problema 37 Hallar las razones trigonométricas de α sabiendo que $\sec\alpha = 3$ y $\alpha \in 4^{o}$ Cuadrante.

Solución:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 3 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Problema 38 Sabiendo que $\csc\alpha = 3$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha = 3 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3},\quad \sec\alpha = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{8}},\quad \cot\alpha = -\sqrt{8}$$

Problema 39 Sabiendo que $\csc\alpha = 2$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha = 2 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sec\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \cot\alpha = -\sqrt{3}$$

Problema 40 Sabiendo que $\tan\alpha = -4$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

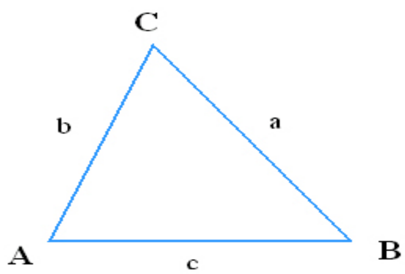
$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{17} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\tan\alpha = -4 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{4}$$

2.1.2 Resolución de Triángulos

Problema 41 Resolver el triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus ángulos $A = 65^o$, $C = 35^o$, y uno de sus lados $b = 15$. Calcular finalmente su área. **Solución:**



Tenemos que $A + B + C = 180^o$ luego $B = 180^o - (A + B) = 180^o - (65^o + 35^o) = 80^o$
Por el teorema del seno tenemos: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{15\cdot\sin 65^O}{\sin 80^O} = 13,8043$

Por el teorema del seno tenemos: $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow c = \frac{15\cdot\sin 35^O}{\sin 80^O} = 8,7364$

Por la fórmula calcularemos la superficie de este triángulo:

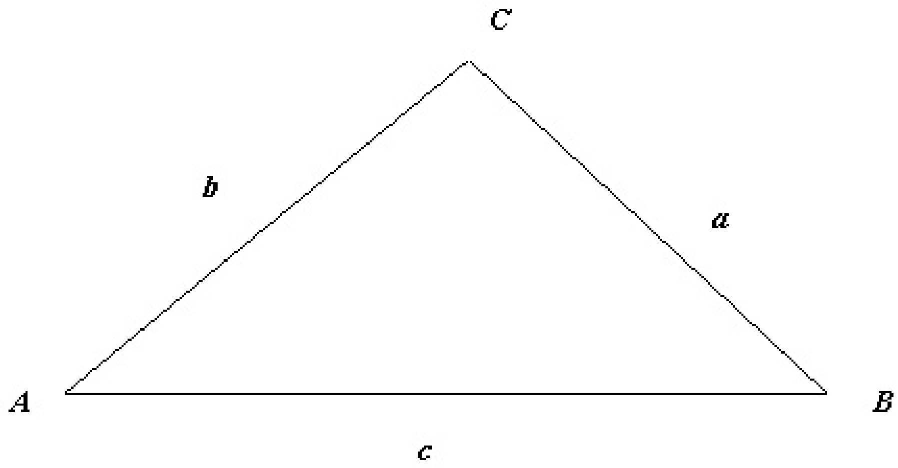
El semiperímetro será $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13,8043+15+8,7364}{2} = 18,77035$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$\sqrt{18,77035\cdot(18,77035-13,8043)\cdot(18,77035-15)\cdot(18,77035-8,7364)} =$

$59,3838$.

Problema 42 De un triángulo sólo se conocen sus lados, $a = 3$, $b = 8$ y $c = 10$. Se pide calcular sus ángulos y su área.



Solución:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longrightarrow 9 = 64 + 100 - 160\cos A \Longrightarrow$$

$$\cos A = \frac{155}{160} = 0,96875 \Longrightarrow A = 14^{\rm o}21'41,44''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Longrightarrow 64 = 9 + 100 - 60\cos B \Longrightarrow$$

$$\cos B = \frac{45}{60} = 0,75 \Longrightarrow B = 41^{\rm o}24'34,64''$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow 100 = 9 + 64 - 48\cos C \Longrightarrow$$

$$\cos C = -\frac{27}{48} = -0,5625 \Longrightarrow C = 124^{\rm o}13'43,9''$$

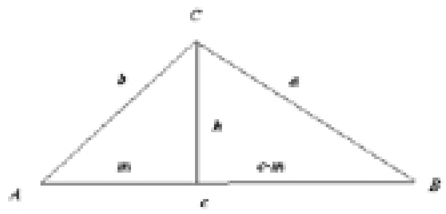
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10,5\cdot 7,5\cdot 2,5\cdot 0,5} = 9,921567416\, u^2$$

Problema 43 Dado el triángulo

1. Resolverlo sabiendo que $a = 3$, $b = 5$ y $C = 30^{\rm o}$, calcular también su área.

2. Demostrar el teorema del seno.



Solución

1.

$$c^2 = 9 + 25 - 30\frac{\sqrt{3}}{2} = 8,02 \Longrightarrow c = 2,83$$

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{2,83}{1/2} \Longrightarrow \sin A = 0,529 \Longrightarrow A = 31^{\text{o}}59'5''$$

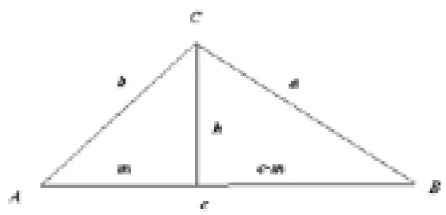
$$B = 180^{\text{o}} - (A + C) = 118^{\text{o}}0'55''$$

$$p = \frac{3 + 5 + 2,83}{2} = 5,415 \Longrightarrow$$

$$S = \sqrt{5,415(5,415-3)(5,415-5)(5,415-2,83)} = 3,74$$

2. Ver teoría

Problema 44 Dado el triángulo



1. Resolverlo sabiendo que $a = 4$, $b = 6$ y $C = 30^{\text{o}}$, calcular también su área.

2. Demostrar el teorema del seno.

Solución

1.

$$c^2 = 16 + 36 - 48\frac{\sqrt{3}}{2} = 10,43 \Longrightarrow c = 3,23$$

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{3,23}{1/2} \Longrightarrow \sin A = 0,619 \Longrightarrow A = 38^{\rm o}15'43''$$

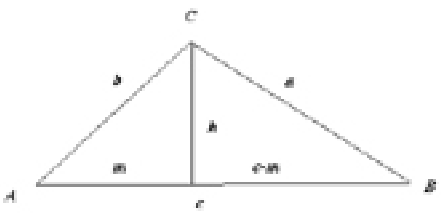
$$B = 180^{\rm o} - (A + C) = 111^{\rm o}44'17''$$

$$p = \frac{4 + 6 + 3,23}{2} = 6,615 \Longrightarrow$$

$$S = \sqrt{6,615(6,615 - 4)(6,615 - 6)(6,615 - 3,23)} = 6$$

2. Ver teoría

Problema 45 Dado el triángulo



Resolverlo sabiendo que $a = 5$, $b = 6$ y $C = 135^{\rm o}$.
Solución

$$c^2 = 25 + 36 - 60\cos 135^{\rm o} \Longrightarrow c = 10,16$$

$$\frac{10,16}{\sin 135^{\rm o}} = \frac{5}{\sin A} \Longrightarrow \sin A = 0,32 \Longrightarrow A = 18^{\rm o}44'54''$$

$$B = 180^{\rm o} - (A + C) = 26^{\rm o}16'$$

2.1.3 Ecuaciones Trigonométricas

Problema 46 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\tan x + \cos 2x = 1$$

Solución:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin^2 x = 0 \Longrightarrow \sin x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sin x(1 - 2\sin x \cos x) = 0 \Longrightarrow \sin x(1 - \sin 2x) = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pi \\ \sin 2x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

Problema 47 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\cos 2x - \sin^2 x = 0$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x = 0 \Longrightarrow (1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 0 \Longrightarrow 1 - 3\sin^2 x = 0 \Longrightarrow$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{3} \Longrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \pm 0,5773502691$$
$$\sin x = +0,5773502691 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 35^{\circ}15'52'' \\ x = 180^{\circ} - 35^{\circ}15'52'' = 144^{\circ}44'8'' \end{array} \right.$$
$$\sin x = -0,5773502691 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 360^{\circ} - 35^{\circ}15'52'' = 324^{\circ}44'8'' \\ x = 180^{\circ} + 35^{\circ}15'52'' = 215^{\circ}15'52'' \end{array} \right.$$

Problema 48 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\sin 2x = 2\cos x$$

Solución:

$$2\sin x \cos x - 2\cos x = 0 \Longrightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0 \Longrightarrow \cos x = 0, \;\; \sin x = 1$$

Luego:

$$\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \;\; x = \frac{3\pi}{2}$$
$$\sin x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

La solución sería:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Problema 49 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow \cos 2x = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2\pi \\ 2x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones serían: $x = \pi + 2k\pi$ y $x = 0 + 2k\pi$

2.1.4 Expresiones Trigonométricas

Problema 50 Demuestra que

$$\frac{\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$$

Solución:

$$\frac{\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x}{\sin 2x}=\frac{(\sin x\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}$$

Problema 51 Simplificar:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$$

Solución:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{5\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{5\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{7\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{11\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{11\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha$$

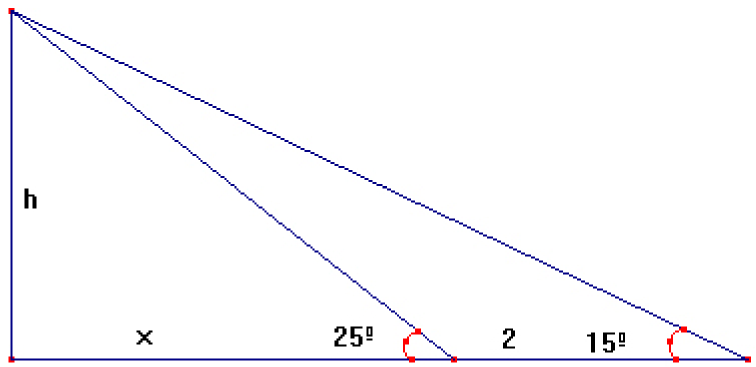
$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\alpha$$

2.1.5 Aplicaciones

Problema 52 Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de 15º. Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer 10 Km y no sabe si llegará a tierra. Después de recorrer 2 Kms en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de 25º. En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa, y que yo pido que me calculeis:

1. La altura del faro.
2. La distancia a la que se encuentra del faro.

Solución:



1. Observando la figura nos damos cuenta rápidamente que:

$$\begin{cases} \tan 15^o = \frac{h}{x+2} \\ \\ \tan 25^o = \frac{h}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0,268 & (x+2) & = h \\ 0,466 & x & = h \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 0,268(x+2) = 0,466x \Longrightarrow x = 2,71 \;\; h = 1,26$$

2. La distancia que le separa del faro está calculada en el apartado anterior.

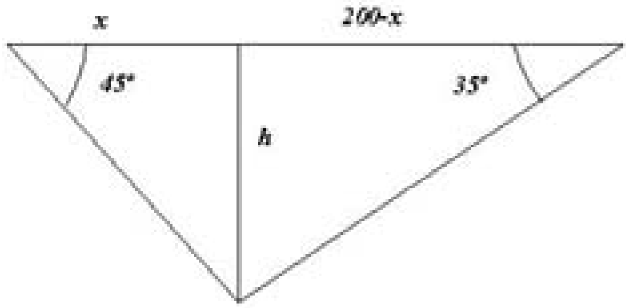
Problema 53 Dos personas, separadas por una distancia de $6Km$ observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30^o, mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15^o. Calcular la altura a la que vuela el avión.

Solución:

$$\begin{cases} \tan 30^o = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 15^o = \dfrac{h}{6-x} \end{cases} \Longrightarrow h = 1,098Km$$

Problema 54 Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de 35^o. Cuando llega al fondo , y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de 45^o. Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado 200 metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estubo trabajando el submarino.

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 35^{\circ} = \dfrac{h}{200-x} \\ \\ \tan 45^{\circ} = \dfrac{h}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow h = 82,3673m$$

Problema 55 Dos personas separadas por una llanura de $2Km$, observan un globo aerostático con ángulos de 30° y 45° respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto.

Solución:

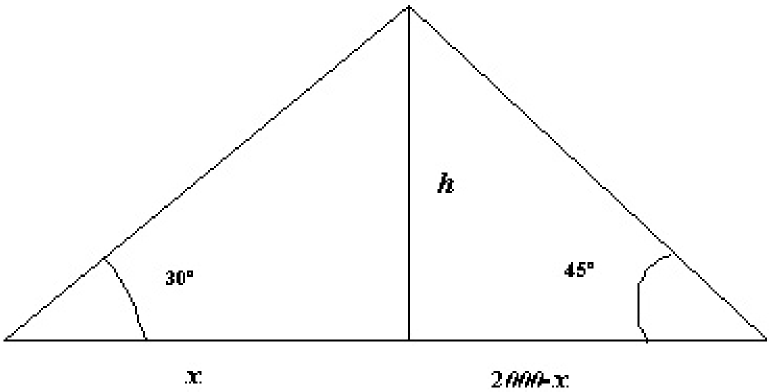
$$\left\{\begin{array}{l} \tan 30^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 45^{\circ} = \dfrac{h}{2000-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h = 732,0508074m \\ \\ x = 1267,949192m \end{array}\right.$$

La solución pedida es que el globo vuela a una altura de $732,0508074m$.

Problema 56 Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. Observas el extremo superior de la antena con un ángulo de 85°, mientras que su base la observamos con 80°. Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 85^{\circ} = \frac{x+7}{y} \\ \tan 80^{\circ} = \frac{x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6,89 \\ y = 1,21 \end{array}\right.$$



2.2 Vectores

Problema 57 Dados los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,6)$ y $C(4,2)$, se pide:

1. Encontrar un punto D de manera que estos cuatro puntos formen un paralelogramo y encontrar su centro.
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Encontrar todos los vectores perpendiculares al vector $\overrightarrow{AB}$ que tengan módulo 8.

   Solución:

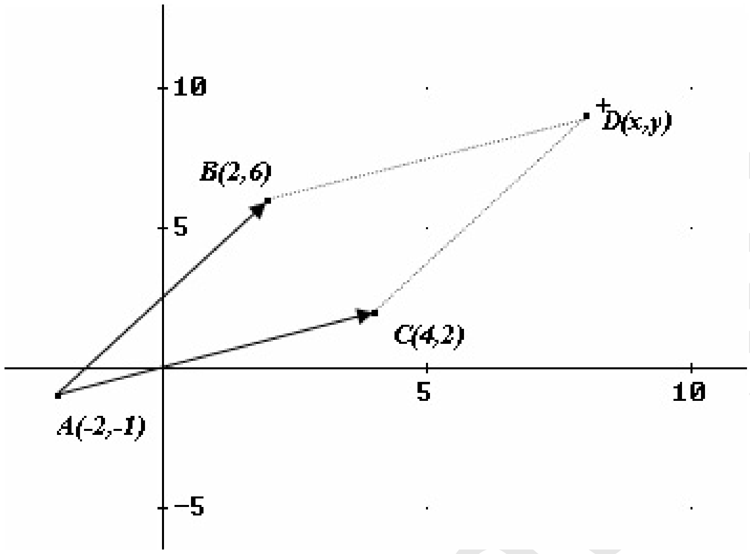
Al no especificar el problema si estos vértices están consecutivos hay varias soluciones posibles, yo voy a pensar que no lo están y encontraré una solución.

1. $\overrightarrow{AC} = (4,2) - (-2,-1) = (6,3)$. Luego

$$D = (2,6) + (6,3) = (8,9)$$

   El punto medio sería: (entre B y C)

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = M(3,4)$$



2. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}\,u$

   Para calcular el otro lado calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2,6)-(-2,-1) = (4,7)$.

   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}\,u$

   Ahora calculamos los ángulos:

   (a) Sea α el ángulo con vértice en A:

   $$\overrightarrow{AB} = (4,7);\ \overrightarrow{AC} = (6,3)$$

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 6 + 7\cdot 3 = 45$$

   $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65};\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{45}$$

   $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{45}{\sqrt{45}\sqrt{65}} = 0,83205 \Longrightarrow \alpha = 33^{\circ}41'24''$$

   (b) Sea β el ángulo con vértice en C:

   $$\overrightarrow{CA} = (-2,-1)-(4,2) = (-6,-3);\ \overrightarrow{CD} = (8,9)-(4,2) = (4,7)$$

   $$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = -6\cdot 4 + (-3)\cdot 7 = -45$$

   $$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC}|\sqrt{45};\ |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65}$$

   $$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} = \frac{-45}{\sqrt{45}\sqrt{65}} = -0,83205 \Longrightarrow \beta = 146^{\circ}18'36''$$

(c) Sea $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (4,7)$ y su módulo $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{65}$. Un vector que tenga módulo uno con la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{u}$ sería:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{(4,7)}{\sqrt{65}} = \left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right)$$

Para obtener otro de módulo 8:

$$\overrightarrow{u_2} = 8\overrightarrow{u_1} = 8\left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right) = \left(\frac{32}{\sqrt{65}}, \frac{56}{\sqrt{65}}\right)$$

Los dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ que estamos buscando serán:

$$\overrightarrow{w_1} = \left(-\frac{56}{\sqrt{65}}, \frac{32}{\sqrt{65}}\right), \quad \overrightarrow{w_2} = \left(\frac{56}{\sqrt{65}}, -\frac{32}{\sqrt{65}}\right)$$

Problema 58 Hallar todos los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (-3,-4)$ que tengan módulo 20.

Solución:
Sea $\overrightarrow{v} = (x,y)$ un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (-3,-4)$. Lo primero que pensamos es que su producto escalar debe ser cero, es decir, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, como el espacio es ortonormal, nos quedaría que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-3,-4) \cdot (x,y) = -3x - 4y = 0$
Es trivial comprobar que, en esta ecuación, para cada valor que apliquemos a una de las variables obtendríamos otro valor para la otra. Me voy a limitar a las soluciones enteras.
Una solución posible sería $x = 4$ e $y = -3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (4,-3)$.
Otra solución posible sería $x = -4$ e $y = 3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (-4,3)$
Claro está, que estos vectores así obtenidos deben ser perpendiculares al vector $\overrightarrow{u}$, lo que nos queda es pasarlos a módulo 20. Para ello voy a seguir dos pasos, primero los pasaré a módulo 1 y luego los pasaré a módulo 20.
Para pasar $\overrightarrow{v}$ a módulo 1 aplicamos la siguiente fórmula: $v' = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$
Obtendríamos los siguientes vectores:
$\overrightarrow{v_1'} = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$
$\overrightarrow{v_2'} = (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$
Para pasarlos a módulo 20 lo único que tendremos que hacer es multiplicar por 20: y nos quedaría:
$\overrightarrow{w_1} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (16,-12)$
$\overrightarrow{w_2} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (-16,12)$

Problema 59 Calcular dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (3,-1)$ que tengan de módulo 8.

Solución:
Dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ serían $\overrightarrow{u_1}=(1,3)$ y $\overrightarrow{u_2}=(-1,-3)$. Tenemos $|\overrightarrow{u_1}|=|\overrightarrow{u_2}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

Los vectores $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\\ \\ \overrightarrow{v_2}=\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}},\dfrac{-3}{\sqrt{10}}\right)\end{array}\right.$ son perperpendiculares al dado y tienen de módulo 1. Luego

$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{w_1}=8\overrightarrow{v_1}=\left(\dfrac{8}{\sqrt{10}},\dfrac{24}{\sqrt{10}}\right)\\ \\ \overrightarrow{w_2}=8\overrightarrow{v_2}=\left(\dfrac{-8}{\sqrt{10}},\dfrac{-24}{\sqrt{10}}\right)\end{array}\right.$ son vectores perpendiculares al dado y tienen módulo 8.

Problema 60 Sean los puntos $A(1,0)$, $B(3,1)$ y $C(5,7)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D y el centro.
2. Calcular el ángulo que tiene por vértice B.
3. Encontrar los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{AB}$ que tengan módulo 5.

Solución:

1. Calculamos $\overrightarrow{BC}=(5,7)-(3,1)=(2,6)\Longrightarrow D=(1,0)+(2,6)=(3,6)$, el centro será el punto medio entre A y C, es decir, $\left(\dfrac{1+5}{2},\dfrac{0+7}{2}\right)=\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$
2. $\overrightarrow{BA}=(2,1)$, $\overrightarrow{BC}=(2,6)$
$$4+6=\sqrt{5}\sqrt{40}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{10}{\sqrt{200}}=0,7\Longrightarrow\alpha=45^{\circ}$$
3. Tenemos dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{AB}=(2,1)$:
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=\frac{5}{\sqrt{5}}(-1,2)=\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)\\ \overrightarrow{v}=\frac{5}{\sqrt{5}}(1,-2)=\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)\end{array}\right.$$

2.3 Geometría Analítica

2.3.1 Ecuaciones de la Recta

Problema 61 Expresa de todas las maneras que conozcas la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(4,5)$, calcula después el ángulo que forma con el eje de abcisas.

Solución:

Sea $\overrightarrow{AB}=(4,5)-(1,0)=(3,5)$ tendremos:

- $r:(x,y)=(1,0)+\lambda(3,5)$ ecuación vectorial
- ecuación paramétrica
$$r:\left\{\begin{array}{ll} x= & 1+3\lambda \\ y= & 5\lambda \end{array}\right.$$
- Ecuación continua
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}$$
- $5x-3y-5=0$ ecuación general.
- $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{3}$ ecuación explícita.
- $y=\dfrac{5}{3}(x-1)$ ecuación punto pendiente.

$$m=\tan\alpha=\frac{5}{3}\Longrightarrow\alpha=59^{o}2'11''$$

2.3.2 Distancias

Problema 62 Calcula la distancia del punto $P(2,3)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r:\ y=3x-2$
2. $r:\left\{\begin{array}{lll} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{array}\right.$
3. $r:\ 3x+4y-5=0$

Solución:

1. $y = 3x - 2 \Longrightarrow 3x - y - 2 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 3 + 3\cdot(-1) - 2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$= 0,3162$

2.

$$\begin{cases} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{cases} \Longrightarrow t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \Longrightarrow -x+1 = 2y-4 \Longrightarrow$$

$x + 2y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$= 1,3416$

3. $3x + 4y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Problema 63 Dado el punto $P(2,-1)$, calcular la distancia de éste a las siguientes rectas:

1.

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

2.

$$s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1}$$

Solución:

1.

$$\lambda = \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} \Longrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

$$d(P,r) = \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 8|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2.

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} \Longrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

$$d(P,s) = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Problema 64 Calcular la distancia del punto $A(3,-1)$ a las rectas:

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2}$

b) $r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

c) $r: 2x+3y-3=0$

Solución:

a) $r: 2x-3y-8=0$

$$d(A,r) = \frac{|2\cdot 3 - 3\cdot(-1) - 8|}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

b) $r: 2x+y-2=0$

$$d(A,r) = \frac{|2\cdot 3 + 1\cdot(-1) - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

c) $r: 2x+3y-3=0$

$$d(A,r) = \frac{|2\cdot 3 + 3\cdot(-1) - 3|}{\sqrt{4+9}} = 0$$

Problema 65 Calcular

1. la distancia del punto $P(2,1)$ a la recta $3x-y+1=0$.

2. el ángulo formado por las rectas

$$r: 3x-y-1=0, \quad s: x+y+2=0$$

Solución:

1.

$$d(P,r) = \frac{|3\cdot 2 - 1\cdot 1 + 1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = 1,89737$$

2.

$$\cos\alpha = \frac{3-1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = 0,4472 \Longrightarrow \alpha = 63^{\text{o}}26'6''$$

2.3.3 Ángulos

Problema 66 Calcula el ángulo formado por las rectas:

1.
$$r_1: \ 3x - y + 1 = 0$$
$$s_1: \ 2x + 3y + 4 = 0$$

2.
$$r_1: \left\{\begin{array}{lll} \text{x=} & \text{2+} & \lambda \\ \text{y=} & \text{2-} & 3\lambda \end{array}\right. \quad r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Solución:

1. Como las rectas están definidas por su ecuación general, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula:
$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$
$$= 0,2631 \ \Longrightarrow \alpha = 74^{\circ}44'42''$$

2.
$$r_1: \left\{\begin{array}{lll} \text{x=} & \text{2+} & \lambda \\ \text{y=} & \text{2-} & 3\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda = \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} \Longrightarrow 3x + y - 8 = 0$$
(Ecuación general de la recta)
$$r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} \Longrightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$
(Ecuación general de la recta)
$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$
$$= 0,2631 \ \Longrightarrow \alpha = 74^{\circ}44'42''$$

Problema 67 Calcular el ángulo que forman las rectas

a) $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3}, \quad s: 2x + y - 1 = 0$

b) $r: \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{array}\right. \quad s: 3x + y + 1 = 0$

Solución:

a) $r : 3x + 2y - 1 = 0,\ s : 2x + y - 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{6+2}{\sqrt{65}} = 0,992277 \Longrightarrow \alpha = 7^{o}7'32''$$

b) $r : x + y - 3 = 0,\ s : 3x + y + 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{3+1}{\sqrt{20}} = 0,894427 \Longrightarrow \alpha = 26^{o}33'54''$$

2.3.4 Triángulos

Problema 68 Dado el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(3,-1)$, $C(-1,3)$ halla la ecuación de sus tres mediatrices y comprueba que se cortan en un único punto, llamado circuncentro.

Solución:

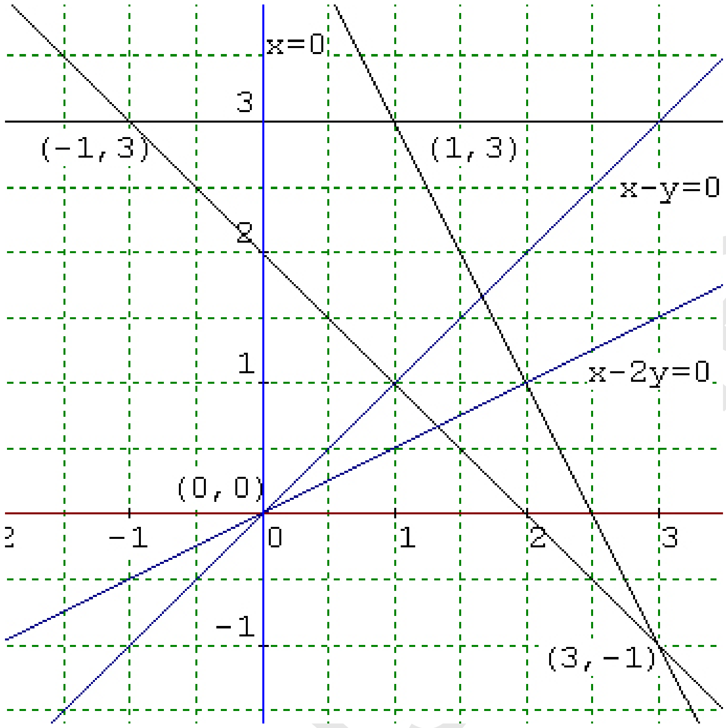
Si queremos calcular la mediatriz que separa a dos puntos podemos pensar de la siguiente manera: la mediatriz entre dos puntos es el conjunto de puntos (x,y) tales que equidistan de los dos. Es decir , entre los puntos A y B la mediatriz será el conjunto de puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,A) = d(P,B)$. Partiendo de este concepto es bastante sencillo la obtención de estas rectas.

Calculamos la mediatriz que hay entre A y B, es decir, $d(P,A) = d(P,B)$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$$
$$4x - 8y = 0 \Longrightarrow x - 2y = 0$$

Calculamos la mediatriz que hay entre B y C, es decir, $d(P,B) = d(P,C)$:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$
$$-8x + 8y = 0 \Longrightarrow x - y = 0$$



Calculamos la mediatriz que hay entre C y A, es decir, $d(P,C) = d(P,A)$:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$
$$4x = 0 \quad \Longrightarrow x = 0$$

Es decir, las mediatrices serían: $x - 2y = 0$, $x - y = 0$ y $x = 0$. Ahora buscamos el punto de intersección. En este caso es bastante sencillo encontrarle ya que una de las ecuaciones es $x = 0$, y por simple sustitución comprobamos que el punto buscado(el circuncentro) es el origen de coordenadas $O(0,0)$.

Problema 69 Dado el triángulo formado por los puntos $A(3,0)$, $B(2,2)$ y $C(-1,1)$, calcular las ecuaciones de sus mediatrices y el punto en el que se cortan (circuncentro).

Solución:

La mediatriz r_1 entre los punto A y B será:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \Longrightarrow r_1 : 2x - 4y - 1 = 0$$

La mediatriz r_2 entre los punto B y C será:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow r_2 : 3x+y-3=0$$

La mediatriz r_3 entre los punto A y C será:

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow r_3 : 8x-2y-7=0$$

Para calcular el circuncentro calculamos el punto de corte de dos de estas rectas.

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 : 2x-4y-1=0 \\ r_2 : 3x+y-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{13}{14}, \frac{3}{14}\right)$$

Problema 70 Dado el triángulo formado por los puntos $A(2,1)$, $B(3,2)$ y $C(4,1)$, se pide:

1. Calcular las ecuaciones de sus mediatrices.
2. Calcular el circuncentro.
3. Calcular la ecuación de la circunferencia circunscrita a este triángulo.

Solución:

1. La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos (x,y) que cumplen

   $$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \Longrightarrow x+y-4=0$$

   La mediatriz del segmento $\overline{BC}$ es el lugar geométrico de los puntos (x,y) que cumplen

   $$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x-y-2=0$$

   La mediatriz del segmento $\overline{AC}$ es el lugar geométrico de los puntos (x,y) que cumplen

   $$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x-3=0$$

2. El circuncentro es el punto en el que se cortan las tres rectas anteriores, basta con resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} x+y-4=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow (3,1)$$

3. La distancia de este punto a uno de vértices es el radio de la circunferencia circunscrita $r = \sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ y tendremos

   $$(x-3)^2+(y-1)^2 = 1 \Longrightarrow x^2+y^2-6x-2y+9=0$$

Problema 71 Dado el triángulo de vértices $A(-3,1)$, $B(1,7)$ y $C(5,-1)$, calcular:

1. El circuncentro (punto en el que se cortan las mediatrices)
2. Una recta que una dos vértices del triángulo.

Solución:

1. Calculamos dos de sus mediatrices:

   Entre A y B

   $$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$$

   $x^2+9+6x+y^2+1-2y=x^2+1-2x+y^2+49-14y \Longrightarrow 2x+3y-10=0$

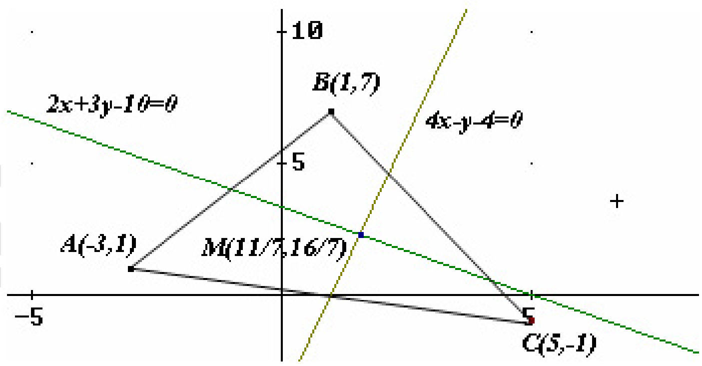
   Entre A y C

   $$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$$

   $x^2+9+6x+y^2+1-2y=x^2+25-10x+y^2+1+2y \Longrightarrow 4x-y-4=0$

   El punto de intersección de estas dos rectas será el circuncentro y vendrá dado por la solución del sistema:

   $$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-10=0 \\ 4x-y-4=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{11}{7},\frac{16}{7}\right)$$



2. Calculo la recta que une A y B:

   $$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,7)-(-3,1)=(4,6) \\ A(-3,1) \end{array}\right.$$

   $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{6} \Longrightarrow 3x-2y+11=0$$

Problema 72 Los puntos $A(-2,-1)$, $B(1,4)$ y $C(3,1)$ forman un triángulo, se pide:

1. Calcular el circuncentro (punto en el que se cortan las mediatrices).
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Calcular la altura del vertice B.

Solución:

1. Calculamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} \Longrightarrow 3x+5y-6=0$$

   Calculamos la mediatriz del lado $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow 4x-6y+7=0$$

   El circuncentro será la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+5y-6=0 \\ 4x-6y+7=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{1}{38},\frac{45}{38}\right)$$

2. (a) Ahora calculamos sus lados:

$$\overrightarrow{AB} = (1,4)-(-2,-1) = (3,5) \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = (-3,-5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3,1)-(-2,-1) = (5,2) \Longrightarrow \overrightarrow{CA} = (-5,-2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (3,1)-(1,4) = (2,-3) \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = (-2,3)$$

   La longitud del lado $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}u$$

   La longitud del lado $\overline{AC}$:

$$|\overline{AC}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}u$$

   La longitud del lado $\overline{AB}$:

$$|\overline{BC}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}u$$

   (b) Ahora calculamos los ángulos: Sea α el ángulo que forman $\widehat{BAC}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{15+10}{\sqrt{34}\sqrt{29}} = 0,7961 \Longrightarrow \alpha = 37^{o}14'5''$$

Sea β el ángulo que forman $\widehat{ABC}$:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-6+15}{\sqrt{34}\sqrt{13}} = 0,428086 \Longrightarrow \beta = 64^{\mathrm{o}}39'14''$$

Sea γ el ángulo que forman $\widehat{BCA}$:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \frac{10-6}{\sqrt{13}\sqrt{29}} = 0,2060 \Longrightarrow \gamma = 78^{\mathrm{o}}6'41''$$

3. La altura será la distancia del punto B a la recta r que pasa por los puntos A y C:

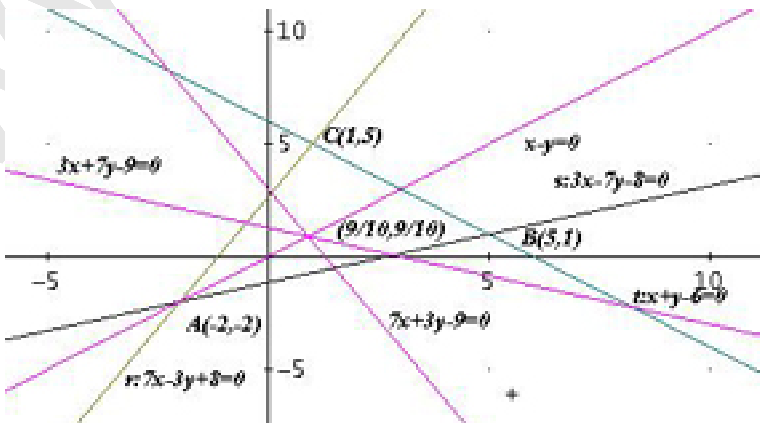
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (3,1)-(-2,-1) = (5,2) \\ C(3,1) \end{array} \right. \Longrightarrow 2x-5y-1=0$$

$$d(B,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 1+(-5)4+(-1)|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19\sqrt{29}}{29}$$

Problema 73 sean $A(-2,-2)$, $B(5,1)$ y $C(1,5)$ los vértices de un triángulo, se pide:

1. Las ecuaciones de las rectas que unen sus lados.
2. La longitud de sus lados.
3. Las ecuaciones de sus mediatrices.
4. El circuncentro.

Solución:



1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,7) \\ P_r(1,5) \end{cases} \Longrightarrow r : 7x - 3y + 8 = 0$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (7,3) \\ P_s(5,1) \end{cases} \Longrightarrow s : 3x - 7y - 8 = 0$$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-4,4) \\ P_r(5,1) \end{cases} \Longrightarrow t : x + y - 6 = 0$$

2. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$
   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$
   $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

3. La mediatriz del segmento $\overline{AC}$ es:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} \Longrightarrow 3x + 7y - 9 = 0$$

La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} \Longrightarrow 7x + 3y - 9 = 0$$

La mediatriz del segmento $\overline{BC}$ es:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} \Longrightarrow x - y = 0$$

4. El circuncentro será la solución del sistema

$$\begin{cases} 3x+ & 7y & -9 = 0 \\ x- & y & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

Problema 74 Los puntos $A(1,0)$, $B(4,2)$ y $C(2,5)$, son los vértices de un triángulo. Calcular:

1. la longitud del lado $\overline{AB}$.
2. ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C.
3. ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Solución:

1.

$$\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

2.

$$\overrightarrow{BC} = (2,5) - (4,2) = (-2,3) \Longrightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{3} \Longrightarrow 3x + 2y - 16 = 0$$

3.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \Longrightarrow 6x + 4y - 19 = 0$$

2.4 Cónicas

2.4.1 Circunferencia

Problema 75 Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$ en el punto $P(-1,0)$
Solución:

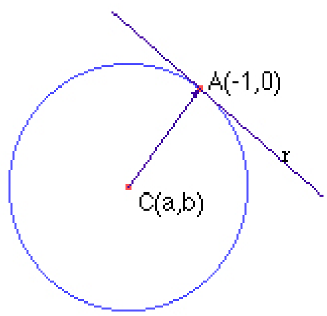
Primero calculamos el centro de la circunferencia, ya que si obtenemos este punto, podremos calcular el vector que partiendo de este punto llega al punto donde queremos hallar la tangente, y este vector será perpendicular a la recta tangente:

$$3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{5}{3} \cdot y - \frac{2}{3} = 0 \Longrightarrow$$

$$m = -2 \cdot a \Longrightarrow \frac{1}{3} = -2 \cdot a \Longrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

$$n = -2 \cdot b \Longrightarrow -\frac{5}{3} = -2 \cdot b \Longrightarrow b = \frac{5}{6}$$

Luego el centro de la circunferencia será $C(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$
Esto quiere decir que un vector perpendicular a la recta que nos piden será



el vector $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{u} = (-1,0) - (-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) = (-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$
Luego la ecuación general de la recta será de la forma $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + Cte = 0$, y teniendo en cuenta que esta recta pasa por el punto $P(-1,0)$, sustituyendo obtendríamos $-\frac{5}{6}\cdot(-1) - \frac{5}{6}\cdot 0 + Cte = 0 \Longrightarrow Cte = -\frac{5}{6}$
La recta pedida sería, por tanto,$-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + (-\frac{5}{6}) = 0 \Longrightarrow x + y + 1 = 0$

Problema 76 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(2,0)$ y $C(2,2)$, y las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto C.

Solución:

La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, sustiyuyendo los puntos tenemos:

$$\left\{\begin{array}{llll} & & n & +p = 0 \\ 4+ & 2m & & +p = 0 \\ 8+ & 2m & +2n & +p = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -\frac{5}{2} \\ n = -2 \\ p = 1 \end{array}\right.$$

La ecuación queda de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 2 = 0$$

Calculamos la recta tangente y normal en $C(2,2)$:

$$4xdx + 4ydy - 5dx - 4dy = 0 \Longrightarrow (4x-5)dx + (4y-4)dy = 0$$

$$(4y-4)dy = -(4x-5)dx \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{4x-5}{4y-4} \Longrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

La recta tangente será: $y - 2 = -\dfrac{3}{4}(x-2)$

La recta normal será: $y - 2 = \dfrac{4}{3}(x-2)$

Problema 77 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1,1)$, $B(2,2)$ y $C(2,0)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{llll} 2- & m+ & n+ & p = 0 \\ 8+ & 2m+ & 2n+ & p = 0 \\ 4+ & 2m+ & & p = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -\frac{4}{3} \\ n = -2 \\ p = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Problema 78 Encontrar el centro y el radio de las posibles circunferencias:

1. $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 4 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 15 = 0$

Solución:

1. $m = -2a = -10 \Longrightarrow a = 5$
   $n = -2b = 8 \Longrightarrow b = -4$
   $p = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{45}$

2. $m = -2a = -2 \Longrightarrow a = 1$
   $n = -2b = -2 \Longrightarrow b = 1$
   $p = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{-13}$. Luego no es una circunferencia.

Problema 79 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(1,0)$, $B(2,2)$ y $C(0,1)$.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1+ & m & & p = 0 \\ 8+ & 2m & +2n+ & p = 0 \\ 1+ & & n+ & p = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} m = & -\dfrac{7}{3} \\ n = & -\dfrac{7}{3} \\ p = & \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$$

Problema 80 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(1,1)$, $B(0,3)$ y $C(1,0)$.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 2+ & m+ & n+ & p = 0 \\ 8+ & & 3n+ & p = 0 \\ 1+ & m+ & & p = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} m = & 5 \\ n = & -1 \\ p = & -6 \end{array}\right.$$

$$x^2 + y^2 + 5x - y - 6 = 0$$

Problema 81 .

1. Determinar el centro y el radio de la circunferencia

$$C : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto $P(4,0)$

3. Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $s : 2x - y + 2 = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{cases} m = -2a = -4 \\ n = -2b = 2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$$

La circunferencia tiene de centro $A(2, -1)$ y radio $r = \sqrt{5}$

2. El vector $\overrightarrow{AP} = (2, 1)$,y como la recta tangente es perpendicular a él tendrá como vector director $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = (-1, 2) \\ P(4, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2t \end{cases} \Longrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

3. La circunferencia que buscamos tiene el mismo centro $A(2, -1)$ que la dada, lo único que nos queda por calcular es su radio. Como la recta que nos dan es tangente a la circunferencia, la distacia desde el centro a la recta será el radio que buscamos.

$$d(A, s) = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

La ecuación de la circunferencia será

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{49}{5} \Longrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 20x + 10y - 24 = 0$$

Problema 82 .

1. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene centro $C(1, 4)$ y es tangente a la recta $s : 3x + 4y - 4 = 0$

2. Determinar el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,0), (0,2) y (2,4).

Solución:

1.

$$r = d(C, s) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

Luego la ecuación buscada es $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

2. La ecuación general de una circunferencia es $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, y sustituyendo los puntos dados en la ecuación tenemos:

$$\begin{cases} p=0 \\ 2n+p+4=0 \\ 2m+4n+p+20=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m=-2a=-6 \\ n=-2b=-2 \\ p=a^2+b^2-r^2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ r=\sqrt{10} \end{cases}$$

En conclusión, el centro es $C(3,1)$, el radio $r=\sqrt{10}$ y la ecuación de la circunferencia pedida será $(x-3)^2+(y-1)^2=10$.

2.4.2 Elipse

Problema 83 Calcular la ecuación de la elipse de excentricidad $e=\frac{1}{4}$ y cuya distancia focal es 4.

Solución:

Tenemos que $2c=4 \Longrightarrow c=2$

$$e=\frac{1}{4}=\frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{a} \Longrightarrow a=8$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow 64=b^2+4 \Longrightarrow b^2=60$$

Luego la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{60}=1$$

Problema 84 calcular la ecuación de una elipse de centro $C(0,0)$, cuyos focos son $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$, y tiene una excentricidad de $0,8$.

Solución:

$$e=\frac{c}{a} \Longrightarrow a=\frac{4}{0,8}=5$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow b^2=a^2-c^2=9$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Longrightarrow 9x^2+25y^2=225$$

Problema 85 Calcular la ecuación de una elipse centrada en el origen de focos $F'(-3,0)$ y $F(3,0)$, con una excentricidad de $0,6$.

Solución:

$$c=3, \;\; e=0,6, \quad e=\frac{c}{a} \Longrightarrow a=\frac{c}{e}=\frac{3}{0,6}=5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Longrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Problema 86 Calcular la ecuación de una elipse centrada en el origen de focos $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$, con una excentricidad de $0,25$.

Solución:

$$c = 4, \quad e = 0,25, \quad e = \frac{c}{a} \Longrightarrow a = \frac{c}{e} = \frac{4}{0,25} = 16$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = 256 - 16 = 240$$
$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{240} = 1 \Longrightarrow 240x^2 + 256y^2 = 61440$$

2.4.3 Hipérbola y Cónicas en general

Problema 87 Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

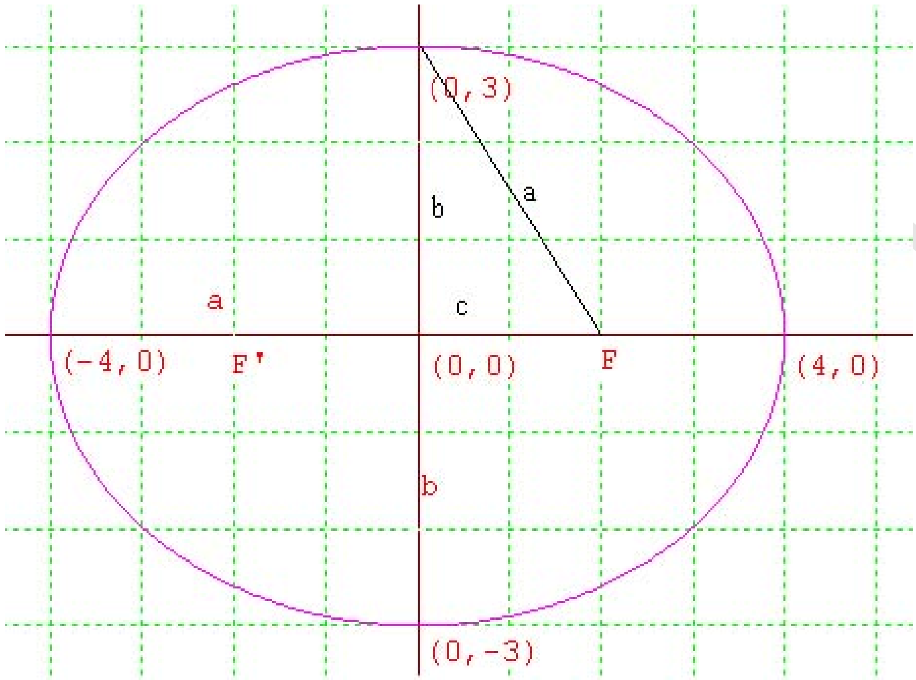
1. Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

   - Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
   - Vértices: $(-4,0)$ $(0,3)$ $(0,-3)$ $(4,0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
   - Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



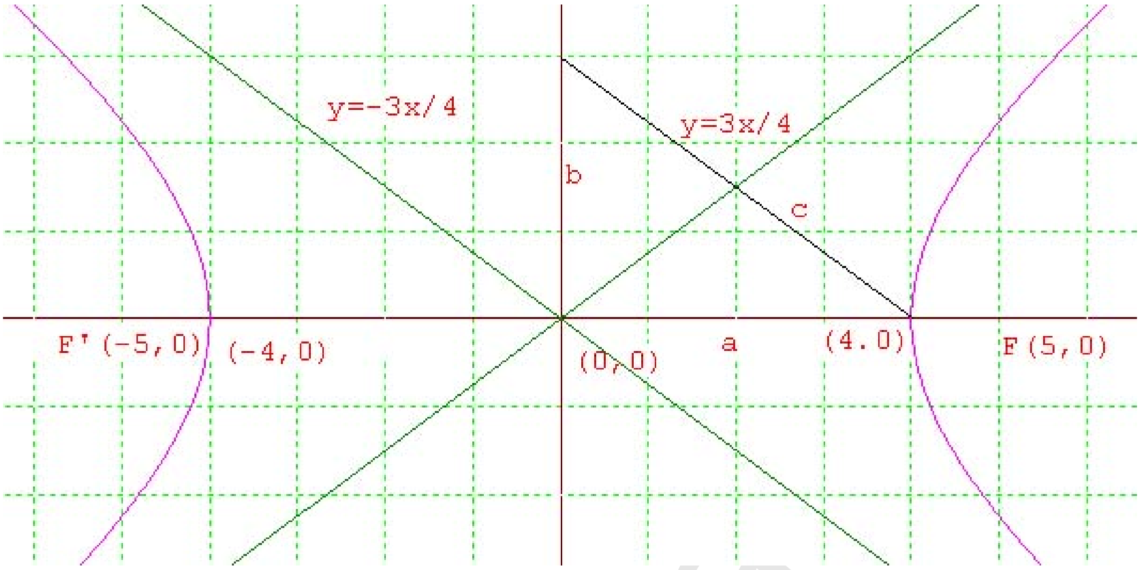
$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$
Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

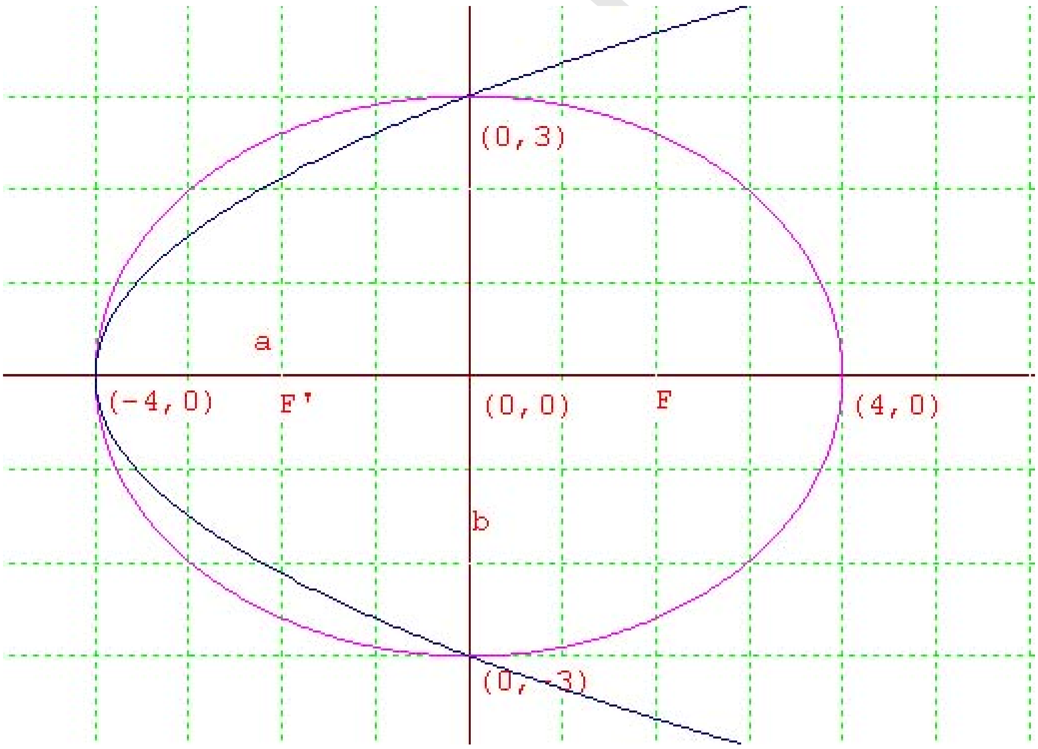
- Focos: $(-5, 0) \quad (5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0) \quad (4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el



problema.

Como pasa por el vértice $(-4, 0), (0, 3), (0, -3)$ por sustitución ten-



dremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rccc} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c=-4,\ a=\frac{4}{9}\ y\ b=0 \Longrightarrow x=\frac{4}{9}y^2-4$$

Problema 88 Se consideran las cónicas C_1 y C_2, cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. Identificar C_1 y C_2.Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).

2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

   - Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
   - Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
   - Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

   $C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
   Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$
   Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
   Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
   Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

   $$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

   Podemos concluir:

   - Focos: $(-5, 0)$ $(5, 0)$

- Vértices: $(-4,0)\quad(4,0)$
- Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$
- Asíntotas:
$$y=\frac{3}{4}x\quad ;\quad y=-\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x=ay^2+by+c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.
Como pasa por el vértice $(-4,0),(0,3),(0,-3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4= & & & c\\ 0= & 9a+ & 3b+ & c\\ 0= & 9a- & 3b+ & c\end{array}\right. \Longrightarrow c=-4,\ a=\frac{4}{9}\ y\ b=0\Longrightarrow x=\frac{4}{9}y^2-4$$

2.4.4 Parábola

Problema 89 Calcular el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que cumplen que, la distancia de él al punto $A(1,1)$ es igual a la distancia de él a la recta $x+1=0$.

Solución:

$$d(P,A)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$
$$d(P,r)=x+1$$
$$d(P,A)=d(P,r)\Longrightarrow y^2-2y+1=4x\Longrightarrow x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$$

Problema 90 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$, que equidistan de otro $F(0,3)$ y de la recta $d:2x+3=0$.

Solución:

$$d(P,F)=\sqrt{x^2+(y-3)^2},\quad d(P,d)=\frac{2x+3}{2}$$
$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\frac{2x+3}{2}\Longrightarrow y^2-24y=12x-27$$

Problema 91 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$, que equidistan de otro $F(3,0)$ y de la recta $d:2x+5=0$.

Solución:

$$d(P,F)=\sqrt{(x-3)^2+y^2},\quad d(P,d)=\frac{2x+5}{2}$$
$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\frac{2x+5}{2}\Longrightarrow 4y^2=44x-11$$

Capítulo 3

Problemas de Análisis

3.1 Límites

3.1.1 Dominio y Recorrido

Problema 92 Hallar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{|x|}$
5. $f(x) = \frac{|x|}{x}$
6. $f(x) = \sqrt{1-x}$
7. $f(x) = 4-x^2$
8. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$
9. $f(x) = |x-2|$
10. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

3.1.2 Cocientes Polinómicos, Conjugados y Trigonométricos

Problema 93 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$
2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$

3. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

4. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

5. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

10. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\, x}{5x}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)}{x}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x \sec x}$

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x \tan x}{x}$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

20. $\lim_{x\to \pi} x \sec x$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

23. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$. (Ayuda: $(\frac{\operatorname{sen} t}{t})^2=\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$)

24. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 3t}{t}=3(\frac{\operatorname{sen} 3t}{3t})$)

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\operatorname{sen} 3t}$)

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

27. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1-\cos h)^2}{h}$

Problema 94 Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+1}{10x^3-3x^2+7}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{10}-11}{10x^{1}1-3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2}{x+3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x^2+3x+1}{x^2-3x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} (2x-\dfrac{1}{x^2})$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+3)^{-2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x}{x+1})$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x^2}{x-1}+\dfrac{3x}{x+1})$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+\sqrt{x^2+3})$

12. $\lim_{x\to\infty}(2x - \sqrt{4x^2+1})$

13. $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2+x})$

14. $\lim_{x\to\infty}(3x + \sqrt{9x^2-x})$

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}}$

18. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-3x+1}{\sqrt{x^2+x}}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^4+1x}}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x+\operatorname{sen} x}$

23. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

24. $\lim_{x\to\infty} x \tan\dfrac{1}{x}$

3.1.3 Regla de L'Hôpital

Problema 95 Calcular por la regla de L'Hôpital los límites de las siguientes funciones:

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$

4. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1-x)}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1+x)}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 3}$

12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$

13. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

15. $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2})$

16. $\lim\limits_{x\to 2} (\dfrac{8}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x - 2})$

17. $\lim\limits_{x\to 2} (\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 4})$

18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

19. $\lim\limits_{x\to 1^+} (\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x - 1})$

20. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{1/x}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x$

24. $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$

25. $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$

26. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

27. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$

28. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{cosec} x$

29. $\lim_{x\to 0} x^2\cot x$

30. $\lim_{x\to\infty}(x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x})$

31. $\lim_{x\to\infty}(x\ \tan\dfrac{1}{x})$

32. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

33. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$

3.1.4 Varios

Problema 96 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=[1^\infty]=e^\lambda$$
$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x\left(1+\frac{1}{5x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

Luego:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=e^{\frac{3}{5}}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(3x^2)\left(\frac{x^2+2}{x^2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{6x^2}{x^2}=6$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=e^6$$

Problema 97 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=e^{\frac{7}{3}}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1}=10$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=e^{10}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=0$$

Problema 98 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

Problema 99 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}8x\left(1+\frac{1}{6x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

Problema 100 Calcular

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\frac{5}{4}$$

Problema 101 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x} = e^{\frac{7}{3}}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1} = 10$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2} = e^{10}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right] = 0$$

Problema 102 Calcular los siguientes límites:
Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow -5}\frac{4-\sqrt{x^2-9}}{x+5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -5}\frac{4-\sqrt{x^2-9}}{x+5} = \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{16-(x^2-9)}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{25-x^2}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})} = \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{(5-x)(5+x)}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{5-x}{4+\sqrt{x^2-9}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Calcular
$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\frac{5}{4}$$

Calcular:
$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

Calcular:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}8x\left(1+\frac{1}{6x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

5.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^3}=[4^\infty]=\infty$$

6.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{3x^3+2}\right)^{5x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{3x^3+2}\right)^{5x}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^\infty\right]=0$$

7.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-3}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x^2\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-6x^2}{2x^2+1}=-3$$

8.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{5}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}5x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

Problema 103 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2+1}=\dfrac{3}{2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-3x-1}{x^5+x^4+1}=0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}=\infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{2x^3}=e^{-8}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^4+x-1}{3x^4+1}\right)^{x^3}=e^{1/3}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{3x^3+x^2-1}\right)^{2x-1}=0$

7. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{2x^3-1}\right)^{3x}=0$

8. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x} = e^{-2}$

9. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^5+x^4-3x^2+4x-1}{x^4-x^3-2x^2+x+1} = \frac{1}{2}$

10. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3-2x^2-x}{x^4-3x^2+x} = -1$

11. $\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{5}{6}$

12. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{2}{3}$

Por L'Hôpital:

13. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

14. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x} = 1$

15. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2} = 1$

16. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2-x}{e^x-1} = -1$

17. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4-x^3+3x^2-4x+1}{x^4-x^3+3x-3} = \frac{3}{4}$

18. $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{3}{4}$

19. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$

20. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = 0$

Problema 104 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3}=2$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}=\dfrac{4}{3}$

Problema 105 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}=\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2/2}=e^{1/2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^5+3x-1}{5x^5+1}\right)^{2x+1}=0$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x}=e^{-3}$

5. $\lim_{x\longrightarrow -2}\dfrac{x^3+3x^2-6x-16}{x^4+2x^3+x^2+x-2}=\dfrac{6}{11}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{3x^4+x^3-2x^2+x-3}{3x^3+2x^2-4x-1}=\dfrac{4}{3}$

7. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{3x^4+2x^3-2x^2}{x^3+x^2+x}=0$

8. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^5-1}{2x^4-2}=\dfrac{5}{8}$

9. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3}=\dfrac{9}{4}$

10. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2}=-\dfrac{2}{3}$

11. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=2$

12. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}=-2$

13. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)}=-1$

14. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-x-\cos x}{\sin^2 x}=1$

15. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

16. $\lim_{x\longrightarrow \infty} xe^x=\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^x=0$

3.1.5 Selectividad

Problema 106 Calcular:

1. $$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3. Utilizando el cambio de variable $\ln x=t$, calcular:
$$I=\int_1^e\frac{1+\ln x^2+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx$$

Solución:

1. Descomponiendo los polinomios según sus raices tendremos que $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ y $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Sustituyendo:
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x-2}{x-1}=+\infty$$

2. Para solucionar este límite voy a emplear dos métodos:

   (a) $$\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=[1^\infty]=e^\lambda$$
   Donde
   $$\lambda=\lim_{x\longrightarrow \infty}x\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{1}{x}=0$$
   Luego
   $$\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=e^\lambda=e^0=1$$

(b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

En esta condiciones podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Es decir, $\ln A = 0 \Longrightarrow\ A = 1$

3. Primero voy a solucionar la integral sin tener en cuenta los límites de integración y luego los aplicaremos.
   La integral la vamos a resolver por sustitución, haciendo $\ln x = t \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = dt$ y sustituyendo tendremos:

$$\int\frac{1+\ln x^2+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int\frac{1+2t+t^2}{(1+t)}dt =$$

$$\int\frac{(1+t)^2}{1+t}dt = \int(1+t)dt = t+\frac{t^2}{2}+C = \ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$I = \left[\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \ln e+\frac{(\ln e)^2}{2}-\left(\ln 1+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Problema 107 1. Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}}{-\cos x} =$$

$= -2.$

2. Determina el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}ax\left(\frac{x+3}{x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}ax\left(\frac{3}{x}\right)=3a$$

Como $\lambda=1\Longrightarrow 3a=1\Longrightarrow a=\frac{1}{3}$.

3. Calcular utilizando el cambio de variable adecuado :

$$\int\frac{x}{(1-2x^2)^2}dx$$

Solución:
Hacemos $u=1-2x^2\Longrightarrow du=-4x\cdot dx\Longrightarrow \frac{du}{-4}=x\cdot dx$ y sustituimos:

$$\int\frac{x}{(1-2x^2)^2}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{1}{4u}+C=\frac{1}{4(1-2x^2)}$$
$+C$

Problema 108 Calcular por la regla de L'Hôpital

1. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{e^x}=\frac{0}{1}=0$$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x+2x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x+2}{4}=$$

$$=\frac{3}{4}$$

Problema 109 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^\infty]=\infty$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^\infty\right]=0$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

Problema 110 Calcular:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\cos x-1)}{x}\cdot(\cos x+1)=0$$

Problema 111 Calcular

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{x}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]$$

Observando el límite vemos que
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=0\\[2ex]\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}\quad\text{no tiene sentido}\end{cases}$$

Podemos concluir con que el límite no existe.

3. $\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$

Solución:

LLamamos $L=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}\Longrightarrow \ln L=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1/\cos^2 x}{\tan^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos x\tan^2 x}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos^2 x\tan^2 x}{-\tan x}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}-\frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{\cos x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0$$

Luego tenemos que $\ln L=0\Longrightarrow e^0=L\Longrightarrow L=1$, es decir, $\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}=1$

Problema 112 Calcular los siguientes límites (donde ”ln significa logaritmo neperiano).

1. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 113 Calcular los siguientes límites

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

3.2 Derivadas

3.2.1 Derivada en un Punto

Problema 114 Calcular la derivada de la siguiente gráfica, así como el valor de ella en un punto.

1. $f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 4)$ en $x = 0$
2. $f(x) = \frac{5-6x^2}{7}$ en $x = 1$
3. $f(x) = 5x^{-2}(x + 3)$ en $x = 1$
4. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$ en $x = 1$
5. $f(x) = (x^3 - 3x)(2x^2 + 3x + 5)$ en $x = 0$
6. $f(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ en $x = 0$
7. $f(x) = (x^5 - 3x)(\frac{1}{x^2})$ en $x = -1$
8. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x = 2$

3.2.2 Aplicación de Métodos

Problema 115 Calcular las siguientes derivadas:

1. $f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$
2. $f(x) = \frac{3-2x-x^2}{x^2-1}$
3. $f(x) = \frac{x^3+3x+2}{x^2-1}$
4. $f(x) = x^4(1 - \frac{2}{x+1})$
5. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$
7. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = (\frac{x^2-x-3}{x^2+1})(x^2 + x + 1)$
10. $f(x) = (\frac{x+1}{x+2})(2x - 5)$
11. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$
12. $f(x) = (3x^3 + 4x)(x - 5)(x + 1)$

13. $f(x) = \frac{x^2+c^2}{x^2-c^2}$ donde c es una constante
14. $f(x) = \frac{c^2-x^2}{c^2+x^2}$ donde c es una constante
15. $f(x) = \frac{x(x^2-1)}{x+3}$
16. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$
17. $f(x) = \frac{4x^{3/2}}{x}$
18. $f(x) = \frac{7}{3x^3}$
19. $f(x) = \frac{4}{5x^2}$
20. $f(x) = \frac{3x^2-5}{7}$
21. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

Problema 116 Calcular las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
2. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
3. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$
4. $f(x) = (x+1)\cos x$
5. $f(x) = -x + \tan x$
6. $f(x) = x + \operatorname{cotan} x$
7. $f(x) = 5x \operatorname{cosec} x$
8. $f(x) = \frac{\sec x}{x}$
9. $f(x) = -\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x$
10. $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$
11. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$
12. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
13. $f(x) = \frac{1+\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{cosec} x}$
14. $f(x) = \tan x \operatorname{cotan} x$
15. $f(x) = x^2 \tan x$
16. $f(x) = 5 \sec x + \tan x$

17. $f(x) = \frac{x}{1-\operatorname{sen} x}$
18. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$
19. $f(x) = \frac{\sec x}{x}$
20. $f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

3.2.3 Primera y Segunda Derivada

Problema 117 Calcular las derivadas primera y segunda de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4\,x^{3/2}$
2. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$
3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$
4. $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$
5. $f(x) = \frac{x}{x-1}$
6. $f(x) = \sec x$

3.2.4 Tangente y Normal a la Gráfica de una Función

Problema 118 Halla la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función dada en el punto indicado:

1. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en el punto $(2, 2)$
2. $f(x) = (x-1)(x^2-2)$ en el punto $(0, 2)$
3. $f(x) = (x^3-3x+1)(x+2)$ en el punto $(1, -3)$
4. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ en el punto $(2, \frac{1}{3})$
5. $f(x) = \tan x$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 1)$
6. $f(x) = \sec x$ en el punto $(\frac{\pi}{3}, 2)$

Problema 119 ¿En que puntos tiene tangente horizontal la gráfica

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad ?$$

Problema 120 ¿En que puntos tiene tangente horizontal la gráfica

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad ?$$

Problema 121 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. Calcular la tangente y la normal a su gráfica en el punto $x = 1$.

Solución:

Calculamos la tangente a su gráfica en el punto $x = 1$:

$f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(1) = 2$

Calculamos el valor de la función en el punto $x = 1$:

$f(1) = 0$.

La ecuación de la tangente será: $y - 0 = 2(x - 1) \Longrightarrow 2x - y - 2 = 0$

La ecuación de la normal será: $y - 0 = -\dfrac{1}{2}(x - 1) \Longrightarrow x + 2y - 1 = 0$

Problema 122 Calcular la recta tangente y la recta normal a la función $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$ en $x = 1$.
Solución:
En $x = 1$ tenemos que el valor de la función vale $f(1) = 1 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (1, 1)$ será el punto de la curva por el que pasarán las rectas tangente y normal. Para calcular las pendientes de estas rectas calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x(x+4)}{(x+2)^2}$$

Y ahora tendremos que $m = f'(1) = \frac{5}{3}$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $x = 1$, teniendo en cuenta que la ecuación punto pendiente de una recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$ tendremos que

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x - 1) \Longrightarrow 5x - 3y - 2 = 0$$

es la ecuación de la recta tangente.
Para calcular la ecuación de la recta normal tenemos que su pendiente es $m' = \frac{-1}{m} = -\frac{3}{5}$ por lo que su ecuación la encontraremos de igual manera que la tangente

$$y - 1 = -\frac{3}{5}(x - 1) \Longrightarrow 3x + 5y - 8 = 0$$

es la ecuación de la recta normal.

Problema 123 Calcular la recta tangente y normal a la gráfica en el punto indicado:

1. $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ en el punto $(3, 5)$
2. $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ en el punto $(2, 6)$
3. $y = \operatorname{sen} 2x$ en el punto $(\pi, 0)$
4. $y = \tan x^2$ en el punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$

Problema 124 Calcular la recta tangente y normal a la función

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 3}$ en el punto $x = 2$.

Solución:

$$a = 2, \quad b = f(2) = 1, \quad y - b = m(x - a)$$
$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = \frac{4}{5}$$

La recta tangente es $y - 1 = \dfrac{4}{5}(x - 2)$.

La recta normal es $y - 1 = -\dfrac{5}{4}(x - 2)$.

3.2.5 Varias

Problema 125 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \sqrt{x^2 - 1}$
2. $y = \cos \frac{3x}{2}$
3. $y = \operatorname{cosec}^2 x$
4. $y = (6x - 5)^4$
5. $y = \tan(\pi x + 1)$
6. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
7. $y = (2x - 7)^3$
8. $y = (3x^2 - 1)^4$
9. $y = 2(x^2 - 1)^3$
10. $y = 3(9x - 4)^4$
11. $y = \frac{1}{x-2}$

12. $y = \frac{1}{x^2+3x-1}$
13. $y = (\frac{1}{x-3})^2$
14. $y = -\frac{4}{(x+2)^2}$
15. $y = \frac{3}{x^3-4}$
16. $y = \frac{1}{(x^2-3x)^2}$
17. $y = x^2(x-2)^4$
18. $y = x(3x-9)^3$
19. $y = \sqrt{1-x}$
20. $y = \sqrt{3-2x}$
21. $y = \sqrt{x^2+2x-1}$
22. $y = \sqrt[3]{3x^3+4x}$
23. $y = \sqrt{x^2-2x+1}$
24. $y = 2\sqrt{4-x^2}$
25. $y = -3\sqrt[4]{2-9x}$
26. $y = (9-x^2)^{\frac{2}{3}}$
27. $y = (9x+2)^{\frac{2}{3}}$
28. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
29. $y = \sqrt{\frac{1}{x^2-2}}$
30. $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3-1}}$
31. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+4}}$
32. $y = \frac{-1}{\sqrt{x+1}}$
33. $y = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$
34. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$
35. $y = \frac{x+1}{2x-3}$
36. $y = \frac{3x+2}{x-1}$

37. $y=\sqrt{\frac{2x}{x+1}}$

38. $y=\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

39. $y=\sqrt{x}(2-x)^2$

40. $y=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

41. $y=\frac{-2(2-x)\sqrt{1+x}}{3}$

42. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$

Problema 126 Calcular la primera y segunda derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x)=2(x^2-1)^2$

2. $f(x)=\frac{1}{x-2}$

3. $f(x)=\operatorname{sen}x^2$

4. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Problema 127 Calcular la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $y=\cos 3x$

2. $y=\operatorname{sen}2x$

3. $y=3\tan 4x$

4. $y=2\cos\frac{x}{2}$

5. $y=\operatorname{sen}\pi x$

6. $y=\sec x^2$

7. $y=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x$

8. $y=5\cos\pi x^2$

9. $y=\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$

10. $y=5\cos(\pi x)^2$

11. $y=\sqrt{\operatorname{sen}x}$

12. $y=\operatorname{cosec}^2x$

13. $y=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$

14. $y = \text{cotan}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

15. $y = x\text{sen}\,\frac{1}{x}$

16. $y = x^2\text{sen}\,\frac{1}{x}$

17. $y = \sec 2x^3$

18. $y = \frac{\cos x + 1}{x}$

Problema 128 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

2.

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$$

3.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

4.

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - 2(x^2 - 1)}{(2x)^2} = \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$

2.

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x^2 + 1) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

3.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{1/3} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

4.
$$f(x) = e^{\sin x} \Longrightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

Problema 129 Calcular las siguientes derivadas

1. $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x^2}{\sin x}$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{(2e^{2x} + 2x)\sin x - (e^{2x} + x^2)\cos x}{\sin^2 x}$$

2. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1 + \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{(2\sqrt{x})\left(1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right)} =$$

   $$= -\frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x}\,((x-1)^2 + x)}$$

3. $f(x) = (x^2 - 1)\sin(x^2)$

   Solución:

   $$f'(x) = 2x\sin x^2 - 2x(x^2 - 1)\cos x^2 = 2x(\sin x^2 - (x^2 - 1)\cos x^2)$$

Problema 130 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + x - 1}$
2. $y = \ln x \cdot \cos(x^2 - 1)$
3. $y = \ln \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$
4. $y = \log_7(\sin x)$
5. $y = e^{x\cos x}$
6. $y = 5^{\cos(x^2-1)}$

7. $y = \arcsin(x^2 - 1)$
8. $y = \arccos\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$
9. $y = \arctan(\ln x)$
10. $y = e^x \cdot \sin(x^3 - 1)$

Problema 131 Calcular las siguientes derivadas

1. $y = 3^{x^2-1} \cdot \sin(x+1)$
2. $y = \arcsin(e^x)$
3. $y = \arccos(5^{x^2-1})$
4. $y = (x^2 - 1)(2x + 1)$
5. $y = x^3 \ln x$
6. $y = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$
7. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$
9. $y = \log_3 e^{x^2-1}$
10. $y = \dfrac{1}{x^3 - x + 1}$

Problema 132 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right)$
2. $y = e^{x^2-x-1}$
3. $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$
4. $y = (x^2 + 1)(x - 1)$

Solución:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right) = \ln(x^2-1) - \ln(x+2)$

   $y' = \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x^2+4x+1}{x^3+2x^2-x-2}$

2. $y = e^{x^2-x-1}$

   $y' = (2x-1)e^{x^2-x-1}$

3. $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

   $y' = \dfrac{4x(x-1)-(2x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$

4. $y = (x^2+1)(x-1)$

   $y' = 2x(x-1)+(x^2+1) = 3x^2-2x+1$

Problema 133 Calcular las siguientes derivadas:

$$\text{a) } y = \arctan(x^2-1) \quad \text{b) } y = e^x(\cos x - 1) \quad \text{c) } y = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)$$

$$\text{d) } y = e^{\sin x - 1} \quad \text{e) } y = \sqrt{x^2-1}$$

Solución:
a) $y' = \dfrac{2x}{1+(x^2-1)^2}$

b) $y' = e^x(\cos x - 1) - e^x \sin x$

c) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2x}{x^2+1}$

d) $y' = \cos x e^{\sin x - 1}$

e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Problema 134 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$ y $g(x) = \ln(x+8)$, escribir la función $g \circ f$ y calcular su derivada.

Solución:

$$u = g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}+8\right)$$

$$u' = \frac{\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-2/3}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2+x+1}+8} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)+24\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

Problema 135 Calcular las funciones derivadas de las siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x}$

   Solución:
   $$f'(x) = \frac{6x^2\cos x - 2x^3(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x^2(3\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x}$$

2. $g(x) = \frac{2}{3}\ln(5x)$

   Solución:
   $$g'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5x} = \frac{2}{3x}$$

3. $h(x) = \frac{1}{2}\,e^{5x-3}$

   Solución:
   $$h'(x) = \frac{1}{2}\,e^{5x-3}\cdot 5 = \frac{5}{2}\,e^{5x-3}$$

Problema 136 Dada la curva de ecuación $y = -x^2+26x$, cálculese la recta tangente a la misma que sea paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

Solución:

La recta $y = -x$ tiene de pendiente $m = -1$. La recta tangente a la función tiene que tener esta pendiente que, como sabemos, se obtiene a partir de la primera derivada.

$y' = -2x + 26 = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{27}{2},\;\; y = \dfrac{675}{4}$

La recta pedida pasa por el punto $\left(\dfrac{27}{2}, \dfrac{675}{4}\right)$ y tiene de pendiente $m = -1$, aplicando la ecuación de la recta punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ tenemos que

$$y - \frac{675}{4} = -\left(x - \frac{27}{2}\right) \Longrightarrow x + y = \frac{729}{4}$$

Problema 137 Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

2. Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

3. Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

1. Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Longrightarrow 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

2. **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1+a^2 \Longrightarrow A(0, 1+a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1-a^2}{2a} = \dfrac{a^2+1}{2a}$.
Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

3.

$$d(A, P) = \sqrt{(a-0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1-a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1-a^2)^2}{4a^2} + (1-a^2)^2} = (1-a^2)\sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}} = \frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(A, P) = 2d(B, P) \Longrightarrow a\sqrt{1+4a^2} = 2\frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2} \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1-a^2}{a} \Longrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0, 1)$ la solución pedida es la positiva $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3 Óptimización

Problema 138 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $6\,cm$.

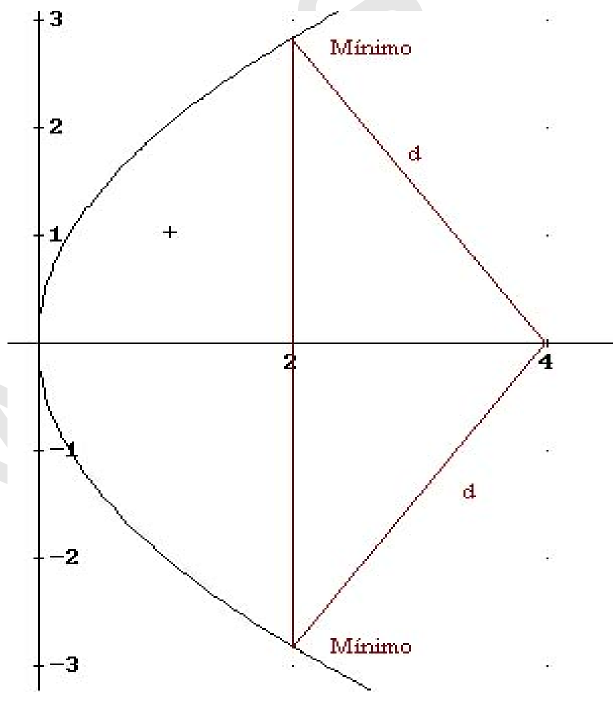
Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(6-x)}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 3 - x = 0 \Longrightarrow x = 3$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 3$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 3$ e $y = 3$, con un área $S(3) = \dfrac{9}{2}\ u^2$

Problema 139 Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4, 0)$.
Solución:
Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia



de este punto al $(4, 0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow \ x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:
Si $x < 2 \Longrightarrow \ d' < 0 \Longrightarrow$ decrece
Si $x > 2 \Longrightarrow \ d' > 0 \Longrightarrow$ crece
Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.

Problema 140 Expresar el número 60 como suma de tres "enteros positivos"de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

Solución:

Tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = 2x \end{array} \right. \Longrightarrow z = 60 - 3x$$

El producto de los tres números es $P(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot 2x \cdot (60 - x) = -6x^3 + 120x^2$, y este producto tiene que ser máximo.

$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ -18x + 240 = 0 \Longrightarrow x = \frac{40}{3} \end{array} \right.$$

Ahora tenemos que decidir el valor que corresponde a un máximo, para ello recurrimos a la segunda derivada

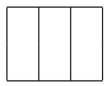
$$P''(x) = -36x + 240 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P''(0) = 240 > 0 \\ P''\left(\frac{40}{3}\right) = -240 < 0 \end{array} \right.$$

Luego cuando $x = 0$ tenemos un mínimo, y cuando $x = \dfrac{40}{3}$ es un máximo.
Pero el problema nos dice sean "enteros positivos". Esto quiere decir que tendremos que decidirnos entre los dos números más próximos a $\dfrac{40}{3}$ que sean enteros, tenemos $13 < \dfrac{40}{3} < 14$, si sustituimos estos valores en la función $P(x)$ tendremos

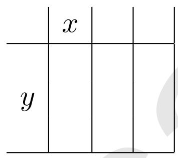
$$\left\{ \begin{array}{l} P(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7098 \\ P(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7056 \end{array} \right.$$

Los tres números buscados son $x = 13$, $y = 26$ y $z = 60 - 3x = 21$. El valor del producto será $P(13) = 7098$.

Problema 141 Un solar rectangular de $11250\,m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50,\ y = L(50) = 75$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\,m$ e $y = 75\,m$ para utilizar la menor valla posible.

Problema 142 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $4\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(4-x)}{2} = \dfrac{4x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x)=0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 2$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 2$ e $y = 2$, con un área $S(2) = 2\ u^2$

Problema 143 Halla la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea $60\,m$.

Solución:

Sea a la longitud de la base de este triángulo isósceles y b la de los dos lados iguales, sea h la altura sobre a de este triángulo, que dividirá a dicha base en dos partes iguales, formando dos triángulos rectángulos con los lados b. Tendremos que el área viene dado por $S = \dfrac{a\cdot h}{2}$, pero por otra parte tenemos que $h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, que sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta $a + 2b = 60 \Longrightarrow a = 60 - 2b$, quedaría

$$S = \frac{a\cdot\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{(60-2b)\cdot\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{60-2b}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$(30-b)\cdot\sqrt{b^2-(30-b)^2} = (30-b)\cdot\sqrt{b^2-(900+b^2-60b)} \Longrightarrow$$

$$S(b) = (30-b)\cdot\sqrt{60b-900}$$

Derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$S'(b) = -\sqrt{60b-900} + (30-b)\cdot\frac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}} =$$

$$-\sqrt{60b-900} + (30-b)\cdot\frac{30}{\sqrt{60b-900}} = \frac{-(\sqrt{60b-900})^2 + (30-b)\cdot 30}{\sqrt{60b-900}} =$$

$$\frac{-(60b-900)+(900-30b)}{\sqrt{60b-900}} = \frac{-60b+900+900-30b}{\sqrt{60b-900}} = \frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}}$$

$$S'(b) = \frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}} = 0 \Longrightarrow b = 20,\ \ a = 20$$

Para comprobar si se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada y calculamos $S''(20)$

$$S''(b) = \frac{-90\cdot\sqrt{60b-900} - (1800-90b)\cdot\dfrac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}}}{(\sqrt{60b-900})^2} =$$

$$\frac{-90(60b-900)-30(1800-90b)}{(60b-900)^{3/2}} = \frac{5400b+81000-54000+2700b)}{(60b-900)^{3/2}} \Longrightarrow$$

$$S''(b) = \frac{2700(1-10b)}{(60b-900)^{3/2}} \Longrightarrow S''(20) = -3\sqrt{3} < 0$$

Luego es un máximo.

Problema 144 Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Solución:

Sean los números x e y tenemos que $P = x \cdot y$, y sabemos que $x + y^2 = 48 \Longrightarrow x = 48 - y^2$, sustituyendo en la primera función tenemos que $P(y) = y(48 - y^2) = 48y - y^3$. Para calcular el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero, $P'(y) = 0$.

$P'(y) = 48 - 3y^2 = 0 \Longrightarrow y^2 = 16 \Longrightarrow y = 4,\ y = -4$ con ambas tenemos que $x = 32$. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

$P''(x) = -6y \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P''(-4) = 24 \\ P''(4) = -24 \end{array} \right. \Longrightarrow$ cuando $y = -4$ tenemos un mínimo, mientras que cuando $y = 4$ es máximo. La solución buscada es, por tanto, $x = 32$ e $y = 4$.

Problema 145 Se ha construido un gran depósito cilíndrico de $81\pi\, m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta $30\, euros/m^2$, y las dos bases con un material que cuesta $45\, euros/m^2$.

1. Determina la relación que hay entre el radio, r, de las bases circulares y la altura, h, del cilindro, y da el coste, $C(r)$, del material necesario para construir este depósito en función de r.

2. ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible?.

3. ¿Cúal será, en este caso, el coste del material?.

Solución:

1. Sabemos que

$$V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi \Longrightarrow h = \frac{81}{r^2}$$

$$C(r) = 2\pi r h \cdot 30 + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 = \frac{4860}{r}\pi + 90\pi r^2$$

2. Para que este coste sea mínimo calculamos su derivada e igualamos a cero $C'(r) = 0$.

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0 \Longrightarrow -4860 + 180\pi r^3 = 0 \Longrightarrow$$
$$r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\,m,\ h = 9\,m$$

   Calculamos la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$C''(r) = \frac{4860\pi \cdot 2r}{r^4} + 180\pi \Longrightarrow C''(3) = 540\pi > 0$$

   Por tanto, en $r = 3m$, $h = 9m$, hay un mínimo.

3. El coste del material será $C(3) = \dfrac{4860}{3}r + 90\pi 3^2 = 2430\pi\, euros$.

Problema 146 Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

La función es $y^2 = 4x \Longleftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$, un punto genérico de la curva sería $(x, \pm 2\sqrt{x})$, cuya distancia al punto $(4, 0)$ será la función

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Para minimizar esta función recurrimos a la primera derivada

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{12}{(x^2 - 4x + 16)\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Longrightarrow d''(2) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Para $x = 2$ tenemos que $y^2 = 4 \cdot 2 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ luego los puntos buscados son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

Problema 147 A partir de una cartulina cuadrada de $60cm$ de lado se va a construir caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados elimininados tienen $10cm$ de lado. Decidir si la observación es correcta o no.

Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado recortado, esto quiere decir que, la base de la caja es un cuadrado de lado $60 - 2x$ y la altura de la caja será x. El volumen de la caja será

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = (3600 + 4x^2 - 240x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

Para que este volumen sea máximo utilizamos la primera derivada

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Longrightarrow x = 30,\ x = 10$$

Para comprobar cúal de estos valores es el máximo recurrimos a la segunda derivada

$$V''(x) = 24x - 480 \Longrightarrow \begin{cases} V''(30) = 240 > 0 \\ V''(10) = -240 < 0 \end{cases}$$

Luego cuando $x = 30$ el volumen es mínimo, mientras que cuando $x = 10$ el volumen es máximo y, por tanto, la observación es correcta.

Problema 148 Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Solución:

Si el lado del primer cuadrado es x su perímetro es $4x$.
El perímetro del segundo cuadrado será $12x$, y su lado $3x$
El perímetro del tercer cuadrado será $4y$
La suma de los perímetros será $4x + 12x + 4y = 1248 \Longrightarrow y = 312 - 4x$ El área del primer cuadrado es x^2
El área del segundo cuadrado es $9x^2$
El área del tercer cuadrado es $y^2 = (312 - 4x)^2$
La función suma de áreas que hay que minimizar será

$$S(x) = x^2 + 9x^2 + (312 - 4x)^2 = 26x^2 - 2496x + 97344$$

Para calcular el mínimo derivamos

$$S'(x) = 52x - 2496 = 0 \Longrightarrow x = 48$$

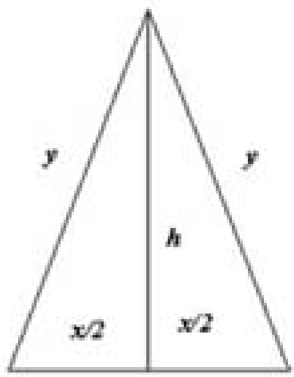
Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada $S''(x) = 52 > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

Las dimensiones de los campos son:

El primer campo tiene de lado $48m$
El segundo campo tiene de lado $144m$
El tercer campo tiene de lado $120m$

Problema 149 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot y}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4-x}$$

$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

3.4 Dominio y Recorrido

Problema 150

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x)=\frac{x-3}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+1\geq 0 \Longrightarrow x\geq -1$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$, luego eliminando el valor $x=-1$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-1,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^3-3$ y $g(x)=|x|$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(|x|)=|x|^3-3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^3-3))=|x^3-3|$

3. Sea $f(x)=\frac{x}{x+1}$ en el dominio $D=(-1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x)=\frac{x}{x+1} \Longrightarrow (x+1)f(x)=x \Longrightarrow xf(x)+f(x)=x \Longrightarrow xf(x)-x=-f(x) \Longrightarrow x(f(x)-1)=-f(x) \Longrightarrow x=\frac{-f(x)}{f(x)-1}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

Problema 151

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x)=\frac{x-4}{(x+3)\sqrt{x+2}}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2\geq 0 \Longrightarrow x\geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=|x|$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(|x|)=|x|^2-2=x^2-2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2)) = |x^2 - 2|$

3. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x) = \frac{2x}{x+1} \Longrightarrow (x+1)f(x) = 2x \Longrightarrow xf(x) + f(x) = 2x \Longrightarrow xf(x) - 2x = -f(x) \Longrightarrow x(f(x) - 2) = -f(x) \Longrightarrow x = \frac{-f(x)}{f(x)-2}$
   En conclusión:
   $$f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$$

Problema 152 .

1. Encuentra el dominio de la función
   $$f(x) = \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{x+3}$$
   Solución:
   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x + 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2$.
   Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3 = 0 \Longrightarrow x = -3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$, luego eliminando el valor $x = -3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
   Solución:
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2)) = \sqrt{x^2 - 2}$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x) = \frac{x}{2x+1} \Longrightarrow (2x+1)f(x) = x \Longrightarrow 2xf(x) + f(x) = x \Longrightarrow 2xf(x) - x = -f(x) \Longrightarrow x(2f(x) - 1) = -f(x) \Longrightarrow x = \frac{-f(x)}{2f(x)-1}$
   En conclusión:
   $$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-2x}$$

Problema 153 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función
   $$f(x) = \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{x+3}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=\sqrt{x}$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-2=x-2$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2))=\sqrt{x^2-2}$

3. Sea $f(x)=\frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D=(-1/2,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x)=\frac{x}{2x+1} \implies (2x+1)f(x)=x \implies 2xf(x)+f(x)=x \implies 2xf(x)-x=-f(x) \implies x(2f(x)-1)=-f(x) \implies x=\frac{-f(x)}{2f(x)-1}$
En conclusión:
$$f^{-1}(x)=\frac{x}{1-2x}$$

Problema 154 Resolver:

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x)=\frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2}$$
Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x-2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
Por otra parte el único valor que anula el denominador es $x-2=0 \implies x=2$, podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-1})=(\sqrt{x-1})^2+1=x-1+1=x$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1))=\sqrt{x^2+1-1}=x$

3. Sea $f(x)=\frac{3x}{x-1}$ en el dominio $D=(1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:

$f(x) = \frac{3x}{x-1} \Longrightarrow (x-1)f(x) = 3x \Longrightarrow xf(x) - f(x) = 3x \Longrightarrow xf(x) - 3x = f(x) \Longrightarrow x(f(x)-3) = f(x) \Longrightarrow x = \frac{f(x)}{f(x)-3}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-3}$$

3.5 Continuidad y Derivabilidad (Teoremas)

Problema 155 1. Calcular

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7})^2-3^2}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \frac{8}{\sqrt{9}+3} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \frac{4}{3}$$

2. Encuentra los valores de k para los que la función

$f(x) = \begin{cases} 2x-k^2 & si \quad x<1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2x-k^2) = 2-k^2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$2-k^2 = k \Longrightarrow k^2+k-2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \quad k = -2$

Problema 156 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$f(x) = \begin{cases} 2x-k^2 & si \quad x<1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$2 - k^2 = k \implies k^2 + k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ 5 & \text{si} \quad x = 0 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (x + 3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 157 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^3-1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 158 Encuentra los valores de k para los que la función $f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & si \quad x < 1 \\ kx^2 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos: $2 - k^2 = k \implies k^2 + k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$

Problema 159 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ 5 & \text{si} \quad x = 0 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 3 \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (x + 3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 160 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{cases} \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 161 Calcular

1. Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 + 2 & \text{si} & x < -1 \\ ax + b & \text{si} & -1 \le x \le 2 \\ x^3 + 1 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Solución:

- En $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = -a + b \end{array}\right. \Longrightarrow -a+b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow 2a+b = 9 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

Tenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} -a+ & b = & 3 \\ 2a+ & b = & 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array}\right.$$

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 5$ en todo R.

Problema 162 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 & \text{si} & x \le 2 \\ & & \\ ax^3 + bx^2 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 = 6a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 = 8a + 4b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - 2b + 1 = 8a + 4b \Longrightarrow 2a + 6b - 1 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{rll} 3ax - b & \text{si} & x \le 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$6a - b = 12a + 4b \Longrightarrow 6a + 5b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2a + 6b & -1 = 0 \\ 6a + 5b & \quad\;\, = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\dfrac{5}{26} \\ \\ b = \dfrac{3}{13} \end{array} \right.$$

Problema 163 Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si} & x \le 2 \\ \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 = \dfrac{4a + 4b + 1}{2} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{4a + 4b + 1}{2} = 8a + 4b - 1 \Longrightarrow 12a + 4b - 3 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \le 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$2a + b = 12a + 4b \Longrightarrow 10a + 3b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 12a + 4b & -3 = 0 \\ 10a + 3b & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ \\ b = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Problema 164 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^3 - 3x + b & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 - bx - 1) = a - 3 + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^3 - 3x + b) = 2a - b - 1$$

Luego $-a + 2b - 2 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b, \quad f'(1^+) = 3a - 3 \Longrightarrow a - b + 3 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} -a + 2b - 2 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 165 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

  $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2x^2 - ax + b) = 2 - a + b$$

  $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - bx + 1) = a - b + 1$$

  Luego $2a - 2b - 1 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

  $$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ ax - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

  $$f'(1^-) = 4 - a, \quad f'(1^+) = 2a - b \Longrightarrow 3a - b - 4 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} 2a - 2b - 1 = 0 \\ 3a - b - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{4} \\ \\ b = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Problema 166 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} & x < 0 \\ ax + b & \text{si} & 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{cases} \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 167 Halla los valores de a y de b para que sea derivable y continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 + ax + b & \text{si} & x \le 0 \\ \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

Tenemos que estudiar la continuidad, y para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que cumplir

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} (x^2 + ax + b) = b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$f(0) = b$$

Luego $b = 1$

Si la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en ese punto. Para que sea derivable debe de cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$

Para calcular $f'(0^-)$ calculamos la derivada de la rama correspondiente y sustituimos $x = 0$

$$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(0^-) = a$$

Para calcular $f'(0^+)$ calculamos la derivada de esta rama empleamos límites, hay que tener en cuenta que $f(0) = b = 1$

$$f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{2h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1-(1+h)}{2h(1+h)}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{-h}{2h+2h^2}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{-1}{2+4h}=-\frac{1}{2}$$

Para que sea derivable $f'(0^-)=f'(0^+)\Longrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$

Por tanto $b=1$ y $a=-\dfrac{1}{2}$

3.6 Integrales

3.6.1 Sustitución

Problema 168 Comprueba el valor de las siguientes integrales resolviéndolas por sustitución:

1. $\displaystyle\int(5x^2+1)^2(10x)dx=\frac{(5x^2+1)^3}{3}+C$
2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}dx=\frac{2(x^3+1)^{3/2}}{9}+C$
3. $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+C$
4. $\displaystyle\int\sec 2x\tan 2x dx=\frac{1}{2\cos 2x}+C$
5. $\displaystyle\int\tan^2 x\sec^2 x dx=\frac{\tan^3 x}{3}+C$
6. $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\sin x}+C$
7. $\displaystyle\int(1+2x)^4 2dx=\frac{(2x+1)^5}{5}+C$
8. $\displaystyle\int(x^2-1)^3 2x dx=\frac{(x^2-1)^4}{4}+C$
9. $\displaystyle\int x^2(x^3-1)^4 dx=\frac{(x^3-1)^5}{15}+C$
10. $\displaystyle\int x(1-2x^2)^3 dx=-\frac{(2x^2-1)^4}{16}+C$
11. $\displaystyle\int x(x^2-1)^7 dx=\frac{(x^2-1)^8}{16}+C$

12. $\int \frac{x^2}{(x^3-1)^2}dx = \frac{1}{3(1-x^3)} + C$

13. $\int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 4\sqrt{x^2+1} + C$

14. $\int \frac{6x}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{3}{2(x^2+1)^2} + C$

15. $\int 5x\sqrt[3]{1+x^2}dx = \frac{15(x^2+1)^{4/3}}{8} + C$

16. $\int 3(x-3)^{5/2}dx = \frac{6(x-3)^{7/2}}{7} + C$

17. $\int \frac{-3}{\sqrt{2x+3}}dx = -3\sqrt{2x+3} + C$

18. $\int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3}dx = -\frac{1}{(x^2+3x+7)^2} + C$

19. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2x-3)} + C$

20. $\int x^3\sqrt{x^4+2}dx = \frac{(x^4+2)^{3/2}}{6} + C$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + C$

22. $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{4x^3+6x^2+4x+1}{4x^4} + C$

23. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = -\frac{1}{3(x^3+1)} + C$

24. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{2\sqrt{x^3+1}}{3} + C$

25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{\sqrt{x^4+1}}{2} + C$

26. $\int \frac{x+2x^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2x^{3/2}(6x+5)}{15} + C$

27. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C$

28. $\int \frac{1}{(3x)^2}dx = -\frac{1}{9x} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}}dx = \sqrt{2x} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2}dx = -\frac{1}{3x} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x}(x^2+5x+35)}{5} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{x^{5/2}+5x1/2}{x^{5/2}}dx = \frac{x^2-5}{x} + C$

33. $\displaystyle\int x^2\left(x - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2(x^2-4)}{4} + C$

34. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x^2}\right)dx = \frac{x^4}{14} - \frac{1}{4x} + C$

35. $\displaystyle\int (9-x)\sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}(15-x)}{5} + C$

36. $\displaystyle\int 2\pi x(8 - x^{3/2})dx = \frac{4\pi x^2(14 - x^{3/2})}{7} + C$

37. $\displaystyle\int (2x-1)^2dx = \frac{(2x-1)^3}{6} + C$

38. $\displaystyle\int x(x^2-1)^2dx = \frac{(x^2-1)^3}{6} + C$

39. $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}dx = \frac{2(x+2)(x-3)^{3/2}}{5} + C$

40. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{(2x+1)^{3/2}(3x-1)}{15} + C$

41. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8)}{105} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}dx = \frac{2\sqrt{x+3}(2x-15)}{3} + C$

43. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx = \frac{\sqrt{2x-1}(3x^2+2x-13)}{15} + C$

44. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x+2}dx = \frac{2(x+2)^{3/2}(35x^2-60x^2+96x-128)}{315} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}dx = -2\sqrt{x+1} - x + C$

46. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \frac{3(x+1)^{4/3}(4x-3)}{28} + C$

47. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{(x-1)\sqrt{2x+1}}{3} + C$

48. $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{2-x}dx = -\frac{2(2-x)^{3/2}(x+3)}{5} + C$

49. $\displaystyle\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$

50. $\displaystyle\int x\sin x^2 dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C$

51. $\displaystyle\int x\cos x^2 dx = \frac{\sin x^2}{2} + C$

52. $\displaystyle\int \cos 6x dx = \frac{\sin 6x}{6} + C$

53. $\displaystyle\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2\cot\left(\frac{x}{2}\right) + C$

55. $\displaystyle\int \sec(1-x)\tan(1-x)dx = -\frac{1}{\cos(x-1)} + C$

56. $\displaystyle\int \sin 2x\cos 2x dx = -\frac{\cos 4x}{8} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x}dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$

58. $\displaystyle\int \csc 2x\cot 2x dx = -\frac{1}{2\sin 2x} + C$

59. $\displaystyle\int \cot^2 x dx = -(x+\cot x) + C$

60. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C$

61. $\displaystyle\int \tan^4 x\sec^2 x dx = \frac{\tan^5 x}{5} + C$

62. $\displaystyle\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x dx = -\frac{2(\cot x)^{3/2}}{3} + C$

3.6.2 Partes

Problema 169 Comprueba el valor de las siguientes integrales resolviéndolas por partes:

1. $\displaystyle\int xe^2dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$

2. $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx = \frac{(2x^2-2x+1)e^{2x}}{4} + C$

3. $\displaystyle\int xe^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$

4. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$

5. $\displaystyle\int xe^{-2x}dx = -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx = -(x+1)e^{-x} + C$

7. $\displaystyle\int x^3\ln x dx = \frac{(4\ln x-1)x^4}{16} + C$

8. $\displaystyle\int x^2\ln x dx = \frac{(3\ln x-1)x^3}{9} + C$

9. $\displaystyle\int x^3e^xdx = (x^3-3x^2+6x-6)e^x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -e^{1/x} + C$

11. $\displaystyle\int x\ln(x+1)dx = \frac{2(x^2-1)\ln(x+1)-x(x-2)}{4} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + C$

13. $\displaystyle\int (\ln x)^2dx = x((\ln x)^2-2\ln x+2) + C$

14. $\displaystyle\int \ln 3x\,dx = x(\ln x-3) + C$

15. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x+1}{x} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx = \frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)} + C$

19. $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2(x-1)^{3/2}(3x+2)}{15} + C$

20. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}dx = \frac{2(x-1)^{3/2}(15x^2+12x+8)}{105} + C$

21. $\displaystyle\int (x^2-1)e^x dx = e^x(x^2-2x+1) + C$

22. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x^2}dx = -\frac{\ln 2x + 1}{x} + C$

23. $\displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

24. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+3x}}dx = \frac{2(3x-4)\sqrt{3x+2}}{27} + C$

25. $\displaystyle\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + C$

26. $\displaystyle\int x^2\cos x dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x + C$

27. $\displaystyle\int x\sec^2 x dx = \ln(\cos x) + x\tan x + C$

28. $\displaystyle\int x\sec x\tan x dx = \frac{x}{\cos x} - \ln\left(\tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\right) + C$

29. $\displaystyle\int \arcsin 2x dx = \frac{2x\arcsin 2x + \sqrt{1-4x^2}}{2} + C$

30. $\displaystyle\int \arccos x dx = -\frac{2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} - x\pi}{2} + C$

31. $\displaystyle\int \arctan x dx = \frac{2x\arctan x - \ln(x^2+1)}{2} + C$

32. $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\, dx = x\arctan\frac{x}{2} - \ln(x^2+4) + C$

33. $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{(2\sin x - \cos x)e^{2x}}{5} + C$

34. $\displaystyle\int e^x\cos 2x\, dx = \frac{(2\sin 2x + \cos 2x)e^x}{5} + C$

35. $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx = \frac{\sin 2x - 2x\cos 2x}{4} + C$

36. $\displaystyle\int x\arcsin x^2 dx = \frac{x^2\arcsin x^2 + \sqrt{1-x^4}}{2} + C$

37. $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx = \frac{(\sin x - \cos x)e^x}{2} + C$

38. $\displaystyle\int x^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}(9x^2 - 6x + 2)}{27} + C$

39. $\displaystyle\int x^2 \cos x dx = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x + C$

40. $\displaystyle\int \ln(1 + x^2)\,dx = 2\arctan x + x\ln(x^2 + 1) - 2x + C$

41. $\displaystyle\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx = \frac{2(x+1)(2x-3)^{3/2}}{5} + C$

42. $\displaystyle\int x\sqrt{4+x}\,dx = \frac{2(3x-8)(x+4)^{3/2}}{15} + C$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2+4}}{3} + C$

44. $\displaystyle\int x\sqrt{4-x}\,dx = -\frac{2(3x+8)(4-x)^{3/2}}{15} + C$

3.6.3 Racionales

Problema 170 Comprueba el valor de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-9}\,dx = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}\,dx = \ln|x+3| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{3\ln|2x-1| - 4\ln|x+1|}{2} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x^4(x^2-1)| - 7\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}\,dx = \ln\left|\frac{(x-2)^5}{x^3(x+2)}\right| + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx = \ln|(x-1)(x+2)| + \frac{x^2}{2} - x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{(x-4)^3}{x+2}\right| + 2x^2\right) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-4)^3}{x}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}\,dx = \ln|x^3(x+1)| + \frac{1}{x} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)^3}\,dx = 6\ln|x-1| - \frac{8x-7}{2(x-1)^2} + \frac{x^2}{2} + 3x + C$

14. $\displaystyle\int \frac{4x^2-1}{2x(x^2+2x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^5}{x}\right| + \frac{3}{2(x+1)} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-6x+9}\,dx = 3\ln|x-3| - \frac{3x}{x-3} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{x^2(x-1)^3}\,dx = 3\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{4x-11}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx = -\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right| + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-2x^2-8}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\right) + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2(x^2+4)} + C$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^4}{x^2-2x+3}\right| + C$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\right) - \frac{1}{2(x^2+2)} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x^2-4|\right) - \frac{x^2}{x^2-4} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^3-x^2+x+3}\,dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(x-1)\right) + \ln|x+1| + C$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{x^4+6x^2+9}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x\right) - \frac{1}{2(x^2+3)} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+14}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln|x^2+4| + 4\ln|x-2| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{x(2x-9)}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx = 2\ln|x-2| + \frac{x+3}{(x-2)^2} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+3}{x^3-x^2-x-2}\,dx = -\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(2x+1)\right) + \frac{\ln|x^2+x+1|}{2} +$

$+\ln|x-2| + C$

30. $\displaystyle\int \frac{-x^4+5x^3-9x^2+3x-6}{x^5-x^4-x+1}\,dx = \arctan x + 2\ln|x-1| - 3\ln|x+1| +$

$\displaystyle+\frac{2}{x-1} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{3}{2x^2+5x+2}\,dx = \ln\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + C$

34. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{x} - 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + C$

35. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3-x^2+5x+1}{x^5+x^4+x^3-x^2-2}\,dx = 3\arctan(x+1) - \arctan x + \ln|x-1| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx = x - \ln|x^2+x+1| + C$

37. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x(\cos x-1)}\,dx = -\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x}\right| + C$

hacer el cambio $u = \cos x$.

38. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+1\right| + C$

hacer el cambio $u = \cos x$.

39. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x+4}\right| + C$

hacer el cambio $u = e^x$.

40. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\arctan e^x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}+1}\right| + C$

hacer el cambio $u = e^x$.

41. $\displaystyle\int \frac{3\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\,dx = \ln\left|\frac{1-\sin x}{\sin x+2}\right| + C$

hacer el cambio $u = \sin x$.

3.6.4 Trigonométricas

Problema 171 Comprueba el valor de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(3x) + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx = \mathrm{arcsec}(2x) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{4+(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx = \arcsin(x+1) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,dx = \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{arcsec}\frac{x^2}{2} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{\arctan^2 x}{2} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-4}}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{arcsec}\left|\frac{x-1}{2}\right| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\pi\cdot\arcsin x - \arcsin^2 x) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \arcsin(e^x) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx = \arcsin\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{9+(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right) + C$

22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x-2)}{3}\right) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\arctan(\cos x) + C$

26. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \arctan(x-1) + C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$

29. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx = \ln|x^2+6x+13| - 3\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$

30. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx = \ln|x^2+2x+2| - 7\arctan(x+1) + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$

32. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx = -\sqrt{-x(x+4)} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx = \arcsin(x-1) + C$

34. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \sqrt{x^2-2x} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\sqrt{4x-x^2} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \arctan(\sqrt{x^2-2x}) + C$

37. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2+1) + C$

38. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-4}{5}\right) C$

39. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-16x^2+16x-3}}\,dx = \frac{1}{4}\arcsin(4x-2) + C$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{9x^2-18x+5}}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{9x^2-18x+5}}{2}\right) + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1}) + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx = 2\sqrt{x-2} - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3x-6}}{3}\right) + C$

43. $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 3}\, dx = 2\sqrt{e^x - 3} - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3e^x - 9}}{3}\right) + C$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}} = 2\arctan\sqrt{x} + C$

3.6.5 Aplicaciones de la Integral Definida

Cálculo de áreas

Problema 172 Comprueba el valor de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^1 2x\, dx = 1$

2. $\displaystyle\int_2^7 3\, dx = 15$

3. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x-2)\, dx = -\frac{5}{2}$

4. $\displaystyle\int_2^5 (-3x+4)\, dx = -\frac{39}{2}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-2)\, dx = -\frac{10}{3}$

6. $\displaystyle\int_0^3 (3x^2+x-2)\, dx = \frac{51}{2}$

7. $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \frac{1}{3}$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3-9x)\, dx = 0$

9. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\, dx = \frac{1}{2}$

10. $\displaystyle\int_0^1 (3x^3-9x+7)\, dx = \frac{13}{4}$

11. $\displaystyle\int_1^2 (5x^4+5)\, dx = 36$

12. $\displaystyle\int_{-3}^3 x^{1/3}\, dx = 4,87 + 2,81\cdot i$

13. $\displaystyle\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} - 2)\, dx = -2,875 + 0,65\cdot i$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{-2}{x}}\, dx = 1,172$

15. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{1}{x^2}\right)\, dx = -2$

16. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x-2}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}$

17. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-\sqrt{x}}{3}\, dx = -\frac{1}{18}$

18. $\displaystyle\int_{0}^{2} (2-x)\sqrt{x}\, dx = 1,508$

19. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^{1/3} - x^{2/3})\, dx = 0,675 + 0,13 \cdot i$

20. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\, dx = -28,56 + 49,46 \cdot i$

21. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\, dx = 2$

22. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{3}$

23. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3\, dx = 0$

24. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\, dx = 1$

25. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt[3]{4+x^2}\, dx = 3,619$

26. $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\, dx = \frac{1}{2}$

27. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$

28. $\displaystyle\int_{0}^{3} |2x-3|\, dx = \frac{9}{2}$

29. $\displaystyle\int_{0}^{4} |x^2 - 4x + 3|\, dx = 4$

30. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x^3|\, dx = \frac{1}{2}$

31. $\displaystyle\int_1^2 (x-1)\sqrt{2-x}\,dx = \frac{4}{15}$

32. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{10}{3}$

33. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3}\,dx = \frac{144}{5}$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = 0,552$

35. $\displaystyle\int_0^7 x\sqrt[3]{x+1}\,dx = 43,18$

36. $\displaystyle\int_{-2}^6 x^2\sqrt[3]{x+2}\,dx = 135,77$

37. $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x-1}\,dx = 67,505$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = 1$

39. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{2}{3}\,x\right)\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

40. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x+\cos x)\,dx = 0,819$

41. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = 1,464$

42. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \csc^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = 1,464$

43. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x\cot 2x\,dx = 0,5$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sin 2x\cos 2x = \frac{1}{8}$

45. $\displaystyle\int_0^1 \sec(1-x)\tan(1-x) = 0,851$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\pi}{4}$

Problema 173 Calcular el área de las siguientes gráficas en los intervalos indicados:

1. $y = x - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Solución: $\dfrac{1}{6}$.
2. $y = -x^2 + 2x + 3$ en el intervalo $[-1, 3]$. Solución: $\dfrac{32}{3}$
3. $y = 1 - x^4$ en el intervalo $[-1, 1]$. Solución: $\dfrac{8}{5}$.
4. $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 2]$. Solución: $\dfrac{1}{2}$.
5. $y = \sqrt[3]{2x}$ en el intervalo $[0, 4]$. Solución: 6.
6. $y = (3 - x)\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 3]$. Solución: $4,157$.
7. $y = \cos\dfrac{x}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 2.
8. $y = x + \sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: $6,935$.
9. $y = 2\sin x + \sin 2x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 4.
10. $y = \sin x + \cos 2x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 2.
11. $y = 4 - x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$. Solución: $\dfrac{32}{3}$.
12. $y = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Solución: $\dfrac{1}{3}$.
13. $y = x\sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$. Solución: $\dfrac{8}{3}$.
14. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$. Solución: 3.
15. $y = x - 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 4]$. Solución: $-\dfrac{8}{3}$.
16. $y = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$ en el intervalo $[0, 2]$. Solución: $\dfrac{2}{3}$.
17. $y = \sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 2.
18. $y = \cos \pi x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Solución: $\dfrac{1}{\pi}$.

Problema 174 Calcular el área de cada una de las regiones siguientes, en los contornos indicados:

1. $y = 3x^2 + 1$ entre $x = 0,\ x = 2,\ y = 0$. Solución: 10.
2. $y = 1 + \sqrt{x}$ entre $x = 0,\ x = 4,\ y = 0$. Solución: $\frac{28}{3}$.
3. $y = x^3 + x$ entre $x = 2,\ y = 0$. Solución: 6.
4. $y = -x^2 + 3x$ entre $y = 0$. Solución: $\frac{9}{2}$.

Cálculo de áreas entre Funciones

Problema 175 Calcular el área encerrada entre las siguientes gráficas:

1. $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = 0$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 2x + 5$
3. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$
4. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$
5. $f(x) = 3(x^3 - x)$, $g(x) = 0$
6. $f(x) = (x - 1)^3$, $g(x) = x - 1$
7. $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 0$
8. $f(x) = 3 - 2x - x^2$, $g(x) = 0$
9. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 3x + 3$
10. $f(x) = -x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x + 2$
11. $f(x) = x$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = 0$
12. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 0$, $x = 1$, $x = 5$
13. $f(x) = 3x^2 + 2x$, $g(x) = 8$
14. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$, $g(x) = x^2$
15. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x) = -2x$, $x = 1$
16. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x$
17. $f(x) = \sqrt{3x} + 1$, $g(x) = x + 1$

18. $f(x) = x^2 + 5x - 6$, $g(x) = 6x - 6$
19. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 3 + 4x - x^2$
20. $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 2x^2$
21. $f(y) = y^2$, $g(y) = y + 2$
22. $f(y) = y(2 - y)$, $g(y) = -y$
23. $f(y) = y^2 + 1$, $g(y) = 0$, $y = -1$, $y = 2$
24. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}}$, $g(y) = 0$, $y = 3$
25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -x^2 + 4x - 2$, $x > 0$
26. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2x + 1$
27. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$
28. $f(x) = 2$, $g(x) = \sec x$, $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
29. $f(x) = 2 \sin x$, $g(x) = \tan x$, $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
30. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos x$, $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$
31. $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$
32. $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$
33. $f(x) = xe^{x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$
34. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{1/x}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$
35. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$
36. $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 4$

Calcular la longitud del arco de curva en el intervalo correspondiente:

1. $y = \dfrac{2}{3}\, x^{3/2} + 1$, $\ x \in [0, 1]$
2. $y = x^{3/2} - 1$, $\ x \in [0, 4]$

3. $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{1}{4x^2}, \ \ x \in [1, 2]$
4. $y = \dfrac{3}{2} x^{2/3}, \ \ x \in [1, 8]$
5. $y = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{1}{6x^3}, \ \ x \in [1, 2]$
6. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \ \ x \in [0, 2]$

Longitud de un arco de curva

Problema 176 Plantear la integral de la longitud de un arco de curva en el intervalo correspondiente:

1. $y = \dfrac{1}{x}, \ \ x \in [1, 3]$
2. $y = x^2, \ \ x \in [0, 1]$
3. $y = x^2 + x - 2, \ \ x \in [-2, 1]$
4. $y = \dfrac{1}{x+1}, \ \ x \in [0, 1]$
5. $y = \sin x, \ \ x \in [0, \pi]$
6. $y = \ln x, \ \ x \in [1, 5]$
7. $x = 4 - y^2, \ \ y \in [0, 2]$
8. $x = \cos y, \ \ y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$
9. $x = e^{-y}, \ \ y \in [0, 2]$
10. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, \ \ y \in [0, \dfrac{a}{2}]$

Cálculo de Volúmenes

Problema 177 Calcular el volumen de rotación al girar sobre el eje de abcisas:

1. $y = -x + 1, \ x \in [0, 1]$
2. $y = 4 - x^2, \ x \in [0, 2]$
3. $y = \sqrt{4 - x^2}, \ x \in [0, 2]$
4. $y = x^2, \ x \in [0, 1]$

5. $y = \sqrt{x},\ x \in [1, 4]$
6. $y = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 2]$
7. $y = x^2,\ x \in [0, 1]$
8. $y = 4 - \dfrac{x^2}{2},\ x \in [-2, 2]$

Problema 178 Calcular el volumen de rotación al girar sobre el eje de ordenadas:

1. $y = x^2,\ x \in [0, 2]$
2. $y = \sqrt{16 - x^2},\ x \in [0, 4]$
3. $y = x^{2/3},\ x \in [0, 1]$
4. $x = -y^2 + 4y,\ y \in [1, 4]$

Problema 179 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre el eje indicado:

1. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$
   (a) del eje x
   (b) del eje y
   (c) de la recta $x = 4$
   (d) de la recta $x = 6$

2. $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 2$
   (a) del eje x
   (b) del eje y
   (c) de la recta $y = 8$
   (d) de la recta $x = 2$
3. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$
   (a) del eje x
   (b) de la recta $y = 6$

4. $y = 6 - 2x - x^2, \ y = x + 6$
   (a) del eje x
   (b) de la recta $y = 3$

Problema 180 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre la recta $y = 4$:

1. $y = x, \ y = 3, \ x = 0$
2. $y = x^2, \ y = 4$
3. $y = \dfrac{1}{x}, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 4$
4. $y = \sec x, \ y = 0, \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$

Problema 181 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre la recta $x = 6$:

1. $y = x, \ y = 0, \ y = 4, \ x = 6$
2. $y = 6 - x, \ y = 0, \ y = 4, \ x = 0$
3. $x = y^2, \ x = 4$
4. $xy = 6, \ y = 2, \ y = 6, \ x = 6$

Problema 182 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre el eje x:

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, \ y = 0, \ x = 0, \ x = 3$
2. $y = x\sqrt{4 - x^2}, \ y = 0$
3. $y = \dfrac{1}{x}, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 4$
4. $y = \dfrac{3}{x+1}, \ y = 0, \ x = 0, \ x = 8$

5. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
6. $y = e^{x/2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$
7. $y = \sqrt{\sin x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$
8. $y = \sqrt{\cos x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

3.6.6 Varias y de Selectividad

Problema 183

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2x^3-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^3-1}\,dx$
7. $\displaystyle\int x2^{x^2+1}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx$
10. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2x^3-1}\,dx = \frac{\ln(2x^3-1)}{2} + C$
3. $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,dx = -\cos e^x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

6. $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^3-1}\,dx = \frac{2e^{x^3-1}}{3} + C$

7. $\displaystyle\int x2^{x^2+1}\,dx = \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx = \ln|x^2+x-1| + C$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx = \frac{2\tan x^3}{3} + C$

10. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + C$

Problema 184 Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int \left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{4x-8}} + \frac{5}{x}\right)\,dx$

2. $\displaystyle\int x(6x^2+1)^{12}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^5}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx$

5. $\displaystyle\int (6x^2-1)e^{2x^3-x}\,dx$

6. $\displaystyle\int 5x^2\sin(3x^3+2)\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+(x^3+1)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{4x-8}} + \frac{5}{x}\right)\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{4x-8} + 5\ln|x| + C$

2. $\int x(6x^2+1)^{12}\,dx = \dfrac{(6x^2+1)^{13}}{156} + C$

3. $\int \dfrac{2x+3}{(x^2+3x-1)^5}\,dx = \dfrac{1}{4(x^2+3x-1)^4} + C$

4. $\int \dfrac{5x^2}{x^3+8}\,dx = \dfrac{5}{3}\ln|x^3+8| + C$

5. $\int (6x^2-1)e^{2x^3-x}\,dx = e^{2x^3-x} + C$

6. $\int 5x^2\sin(3x^3+2)\,dx = -\dfrac{5}{9}\cos(3x^3+2) + C$

7. $\int \dfrac{x^2}{1+(x^3+1)^2}\,dx = \dfrac{1}{3}\arctan(x^3+1) + C$

8. $\int \dfrac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}\,dx = \dfrac{1}{3}\tan(x^3+3) + C$

Problema 185 Calcular el área que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x + 3$.

Solución:

Primero buscamos los puntos de corte de ambas gráficas, bastará igualarlas:

$$2x^2 + x - 1 = 3x + 3 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ \ x = -1$$

El área que encierran estas gráficas estará comprendidad entre estos dos puntos y será $\int_{-1}^{2}|f(x) - g(x)|\,dx$. Calcularemos la diferencia entre las dos funciones, después su integral definida, y el valor absoluto de este valor será el área pedida

$$\int_{-1}^{2}(2x^2 - 2x - 4)\,dx = \left.\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = -9$$

$$S = |-9| = 9\,u^2$$

Problema 186 Calcular el área que encierran la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^3+8}$$

el eje de abcisas, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$.

Solución:

Primero tendremos que comprobar si la función corta al eje de abcisas en el intervalo de integración $[0,2]$, para ello hacemos $f(x)=0 \Longrightarrow x=0$, luego la gráfica de la función está o por encima o por debajo del eje de abcisas en todo el intervalo, por tanto, el área será

$$\int_0^2 \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x^3+8|\Big]_0^2 = \frac{5}{3}\ln 2$$

$$S = \left|\frac{5}{3}\ln 2\right| = \frac{5}{3}\ln 2\ u^2$$

Problema 187 Hallar todas las funciones f cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2+x}$$

indicando el dominio de definición de éstas.
Solución:

- Tenemos que calcular las primitivas de $f'(x)$, como el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, primero dividimos los dos polinomios:

$$\begin{array}{rl} x^4+0x^3+0x^2+x+1 & \underline{|x^2+x} \\ \underline{-x^4-x^3} \qquad\qquad\quad & x^2-x+1 \\ -x^3+0x^2+x+1 & \\ \underline{+x^3+x^2} \qquad\quad & \\ x^2+x+1 & \\ \underline{-x^2-x} \quad & \\ 1 & \end{array}$$

Tenemos, por tanto, que calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \int\left(x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x}\right)dx = \int(x^2-x+1)dx + \int\frac{dx}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int\frac{dx}{x(x+1)}$$

Tendremos que calcular esta última integral, lo haremos por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}\right.$$

Luego tendremos:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \ln(x+1) + C$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C$$

- Ahora calculamos el dominio de estas funciones:
  Como tenemos un logaritmo neperiano podremos decir que el dominio D de esta función sería: $D = \{x \in R$ tales que $\dfrac{x}{x+1} > 0$ y $x \neq -1\}$
  Para hallar esta región tenemos que estudiar el signo de $\dfrac{x}{x+1}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
signo x	$-$	$-$	$+$
signo $(x+1)$	$-$	$+$	$+$
signo $\frac{x}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

En conclusión, tendremos que el dominio será:

$$\boxed{D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)}$$

Problema 188 Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 11 - x \end{array} \right. \Longrightarrow x^2 - 1 = 11 - x \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3, 8) \\ (-4, 15) \end{array} \right.$$

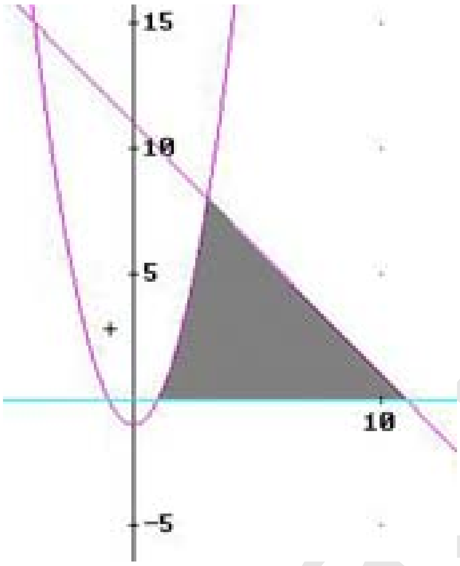
$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1, 0) \\ (-1, 0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 11 - x \\ y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x = 11 \Longrightarrow (11, 0)$$

El recinto pedido estará encerrado entre los puntos $(1, 0)$, $(3, 8)$ y $(11, 0)$. Luego el área será:

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx + \int_3^{11} (11 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 + \left[11x - \frac{x^2}{2}\right]_3^{11}$$

Luego $A = \dfrac{116}{3}\ u^2$



Problema 189 Calcular $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

Solución:

Descomponemos el denominador en factores

$$x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$$

Empleamos el método de descomposición polinómica

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \Longrightarrow$$

$$x+1 = A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

Dando valores a x tenemos:

Si $x=0 \Longrightarrow 1=-6A \Longrightarrow A=-\frac{1}{6}$

Si $x=2 \Longrightarrow 3=10B \Longrightarrow B=\frac{3}{10}$

Si $x=-3 \Longrightarrow -2=15C \Longrightarrow C=-\frac{2}{15}$

Sustituyendo estos valores en la integral tenemos

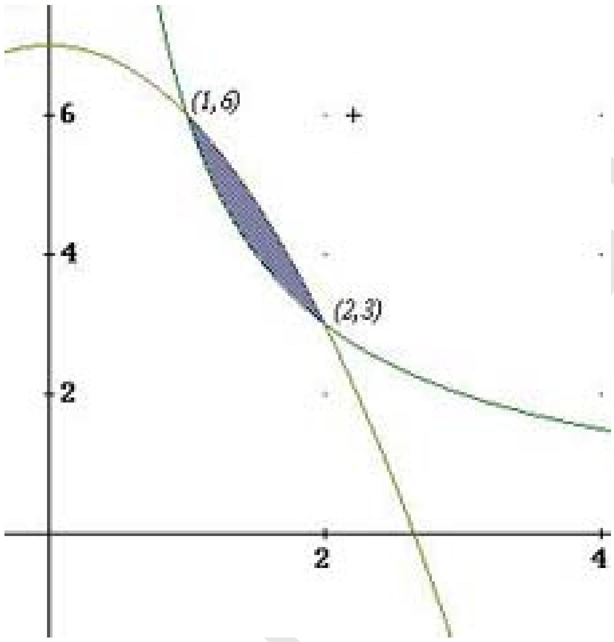
$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \int \frac{-1/6}{x}\,dx + \int \frac{3/10}{x-2}\,dx + \int \frac{-2/15}{x+3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + K$$

Problema 190 Calcula el área que tiene el único recinto cerrado y limitado por las gráficas de las funciones $y = -x^2 + 7$ e $y = \dfrac{6}{x}$ (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y = -x^2 + 7 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow -x^2 + 7 = \frac{6}{x} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1,6) \\ (2,3) \\ (-3,-2) \end{array}\right.$$

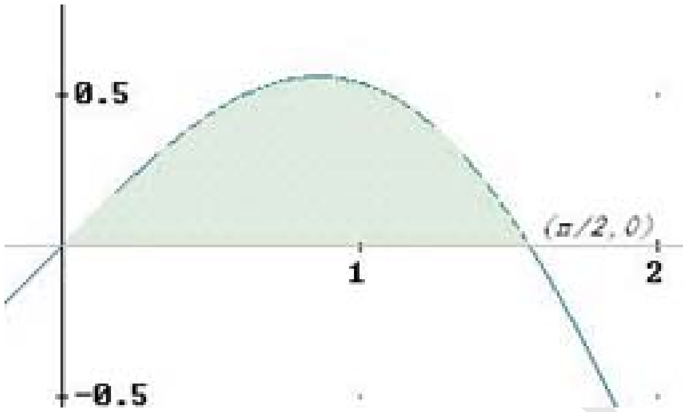
El recinto está comprendido entre los puntos $(1,6)$ y el $(2,3)$.

$$A = \int_1^2 \left(-x^2 + 7 - \frac{6}{x}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x - 6\ln|x|\right]_1^2 = \frac{14}{3} - 6\ln 2 \; u^2$$

Problema 191 La gráfica de la curva $y = x\cos x$, cuando $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, y el eje OX limitan una superficie. Determinar el área de esa superficie.

Solución:

La función $y = x\cos x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ es positiva, luego el área



que buscamos es

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \; dx$$

que vamos a resolver por partes

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x \, dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right.$$

$$\int x \cos x \; dx = x \sin x - \int \sin x \; dx = x \sin x + \cos x + C$$

Luego

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \; dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \; u^2$$

Problema 192 Calcular integrando por partes, el valor de:

$$\int_1^2 x^2 \ln x \; dx$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2 \, dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x} \; dx \\ \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right.$$

$$\int x^2 \ln x \; dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 \; dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3$$

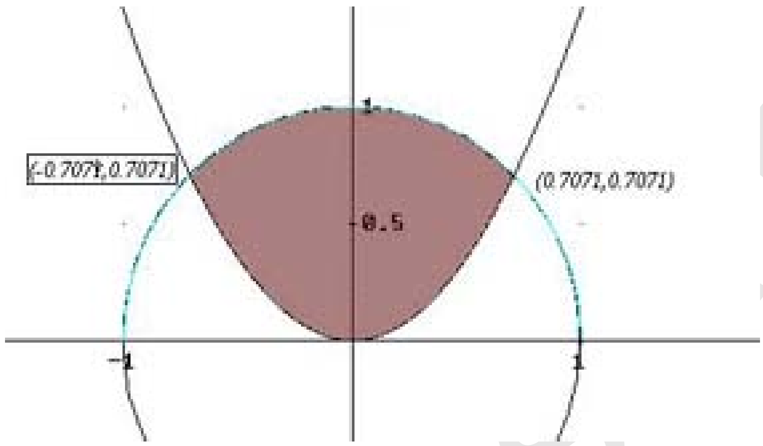
Luego

$$\int_1^2 x^2 \ln x \; dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

Problema 193 Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Luego el punto buscado es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Calculamos las dos integrales independientemente.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\,dx = \left[\sqrt{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}$$

Para resolver la segunda integral hacemos un cambio de variable

$$x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\;dt$$

Los nuevos límites de integración serán

Si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Si $x = 1 = \sin t \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Luego

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

El resultado final será:

$$A = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}$$

Problema 194 Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1-2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1-2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

3.7 Representaciones Gráficas

3.7.1 Asíntotas

Problema 195 Hallar, si existen, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones:

1. $$f(x) = \frac{9x^2+2}{3x+5}$$

   Solución:
   Verticales:

De existir una asíntota vertical en $x = p$ se deberá de cumplir que $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \infty$. El punto p que buscaríamos sería tal que anularía el denominador: $3x + 5 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{5}{3}$
Tendremos:

$$\lim_{x \longrightarrow -\frac{5}{3}} \frac{9x^2 + 2}{3x + 5} = \frac{27}{0} = \infty$$

Luego tenemos una asíntota vertical $x = -\frac{5}{3}$

Nos podemos preguntar, el porqué hemos resuelto el límite si habíamos escogido un x que anulaba el denominador. La explicación es porque si ese límite hubíera sido finito o no existíese, estaríamos en la situación de que no habría asíntota.

<u>Horizontales:</u>

De existir una asíntota horizontal en $x = c$ se cumpliría que $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = c$
Calculemos este límite:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{3x + 5} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9 + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x}} = \frac{9}{0} = \infty$$

Podemos concluir con que no hay asíntotas horizontales.
<u>Oblicuas:</u>

Para que la recta $y = ax + b$ sea una asíntota oblicua debe de ser $a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$.
Calculemos estos coeficientes:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{3x^2 + 5x} = \frac{9}{3} = 3$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{9x^2 + 2}{3x + 5} - \frac{9}{3}x) = -5$$

Existe una asíntota oblicua, la recta: $y = \frac{9}{3}x - 5$.

2.

$$g(x) = \frac{x^2}{3 + 2x^2}$$

Solución:

<u>Verticales:</u>
Veamos si se anula el denominador:$3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2 = -3 \Longrightarrow$

$x^2 = -\frac{3}{2} \Longrightarrow x = \sqrt{-\frac{3}{2}}$ y como no existen soluciones reales, al ser la raiz cuadrada de un número negativo, no hay asíntotas verticales.

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{3+2x^2} = \frac{1}{2}$$

Luego existe una asíntota horizontal en $y = \frac{1}{2}$.

Oblicuas:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{3x+2x^3} = 0$$

Luego la función no tiene asíntotas oblicuas.

3.7.2 Representaciones

Problema 196 Representar gráficamente las siguientes funciones:

1. $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

2. $$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$$

3. $$f(x) = 2 - x - x^3$$

4. $$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

5. $$f(x) = 3x^2 - 9x + 1$$

6. $$f(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$$

7. $$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

8.
$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 2$$

9.
$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

10.
$$f(x) = 3x^4 - 6x^2$$

11.
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$$

12.
$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5$$

13.
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$$

14.
$$f(x) = x^5 + 1$$

15.
$$f(x) = x^5 - 5x$$

16.
$$f(x) = (x-1)^5$$

17.
$$f(x) = |2x - 3|$$

18.
$$f(x) = |x^2 - 6x + 5|$$

19.
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

20.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

21.

$$f(x) = 3x^{2/3} - 2x$$

22.

$$f(x) = 3x^{2/3} - x^2$$

23.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$$

24.

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$$

25.

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{18}\sin 3x \quad 0 \le x \le 2\pi$$

26.

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x \quad 0 \le x \le 2\pi$$

27.

$$f(x) = 2x - \tan x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

28.

$$f(x) = 2x + \cot x \quad 0 < x < \pi$$

29.

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - 3$$

30.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$$

31.
$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

32.
$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$$

33.
$$f(x) = x\sqrt{4 - x}$$

34.
$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

35.
$$f(x) = \frac{x + 2}{x}$$

36.
$$f(x) = x + \frac{32}{x^2}$$

37.
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

38.
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

39.
$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$$

40.
$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2}$$

Problema 197 Dada la función:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

Calcular:

1. Puntos de corte con los ejes.

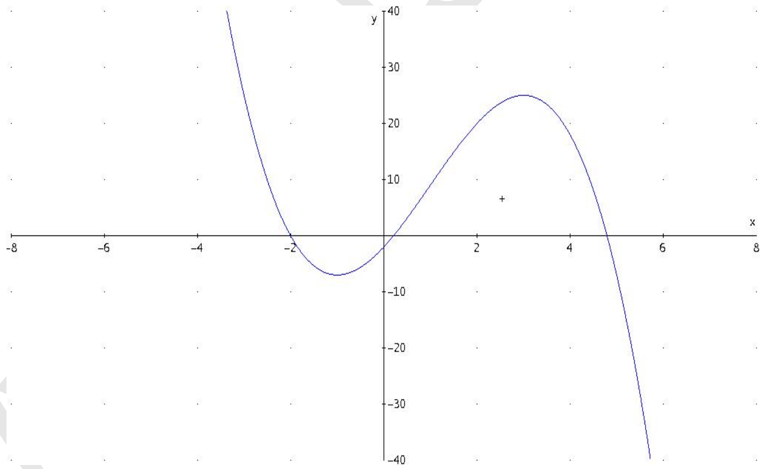
2. Crecimiento y decrecimiento de la función.

3. Máximos y Mínimos.

Solución:

1. Para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2$, es decir, el punto de corte sería $(0, -2)$. Para encontrar los puntos de corte con el eje de abcisas hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^3 + 3x^2 + 9x - 2 = 0$ donde obtenemos las soluciones $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $x = -2$ En resumen todos los puntos de corte serían:

$$(0, 2),\ (\frac{5-\sqrt{21}}{2}, 0),\ (\frac{5+\sqrt{21}}{2}, 0),\ (-2, 0)$$



2. Para calcular los intervalos en los que crece y decrece la función buscamos los puntos críticos, es decir, aquellos que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = -1$$

Es decir:$f'(x) = -3(x - 3)(x + 1)$ y sabemos que la función crece si $f'(x) > 0$ y decrece si $f'(x) < 0$. Veamos la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x+1)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-3(x-3)(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	*decrece*	*crece*	*crece*	*decrece*

3. Por lo visto en el apartado anterior Hay un máximo en el punto $x = 3 \Longrightarrow (3,25)$, y hay un mínimo en el punto $x = -1 \Longrightarrow (-1,-7)$. Otra forma de comprobarlo es calculando la segunda derivada:
$f''(x) = -6x+6 \Longrightarrow f''(3) = -18+6 = -12 < 0 \Longrightarrow$ Máximo en $x = 3$.
$f''(x) = -6x+6 \Longrightarrow f''(-1) = 6+6 = 12 > 0 \Longrightarrow$ Mínimo en $x = -1$.

Problema 198 Representar la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

Solución:

- **Dominio**

  El denominador se anula cuando $x - 1 = 0$ luego el dominio será $R - \{1\}$.

- **Puntos de corte**

  Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un punto de corte.

  Si hacemos $\dfrac{2x^2}{x-1} = 0 \Longrightarrow 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, obtenemos el mismo punto de corte.

- **Simetrías**

  $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{-x-1} \Longrightarrow$ no hay simetrías.

- **Asíntotas**

  1. **Verticales** El denominador se anula cuando $x-1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ es la posible asíntota.

     $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{2x^2}{x-1} = \pm\infty$, luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

2. **Horizontales** Calculamos el limite de la función cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

   $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = \infty$, luego no hay asíntotas horizontales.

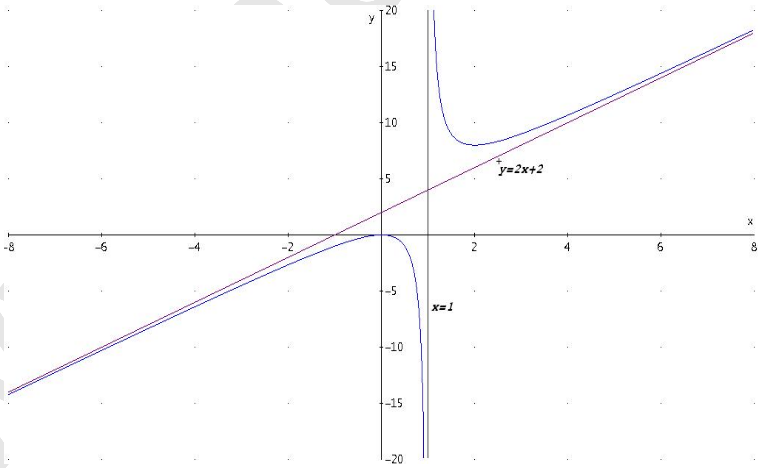
3. **Oblicuas** La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

   $$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^2}{x^2-x} = 2$$

   $$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) =$$

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1}\right) = 2$$

   Luego la asíntota oblicua buscada es $y = 2x + 2$



- **Puntos críticos** Para calcularlos hacemos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2$$

Para comprobar si se trata de un máximos o un mínimos observamos que el denominador de la segunda derivada es siempre positivo. Por tanto, para decidir el signo de $f'(x)$ sólo tenemos que estudiar el numerador.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x(x-2)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(0, 0)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego es un máximo.

En el punto $(2, 8)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego es un mínimo.

Con estos datos tenemos suficiente información para dibujar la gráfica de esta función.

Problema 199 Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

1. Estudiar el dominio, simetría y puntos de corte con los ejes de f.
2. Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. Hallar los puntos críticos, si los hay.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** $R - \{0\}$

   Puntos de Corte:

   - Con el eje de abcisas no hay puntos de corte, ya que al hacer $x = 0$ la función no existe.
   - Para calcular éstos con el eje de ordenadas, hacemos $f(x) = 0$:

   $$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Longrightarrow (-0,3819; 0) \ \ (-2,6180; 0)$$

2. **Asíntotas:**

   - **verticales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \pm\infty$$

   Luego la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

- **horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

- **oblicuas:**

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = \frac{x^2+3x+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x} - x \right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

Luego la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua.

3. **Máximos y Mínimos:** Para calcularlos utilizamos la primera derivada igualada a cero, y decidiremos por el criterio de la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

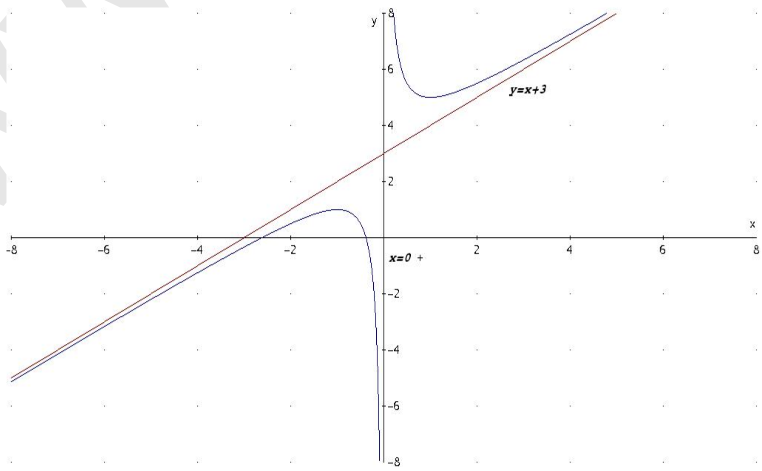
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1 \Longrightarrow (1,5),\ (-1,1)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f''(1) = 1 > 0,\ \ f''(-1) = -1 < 0$$

En el punto $(1,5)$ la función tiene un mínimo, mientras que en el $(-1,1)$ tiene un máximo.

4. **Dibujo de la gráfica:**



Problema 200 Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x-15}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.

2. Calcular sus asíntotas.

3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-5, 3\}$

   (b) **Puntos de Corte:**
   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+2(-x)-15} = \frac{-x^3}{x^2-2x-15} \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2+4x-45)}{(x^2+2x-15)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -9,\ x = 5$$

   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2+4x-45$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 5)$	$(5, +\infty)$
$x+9$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

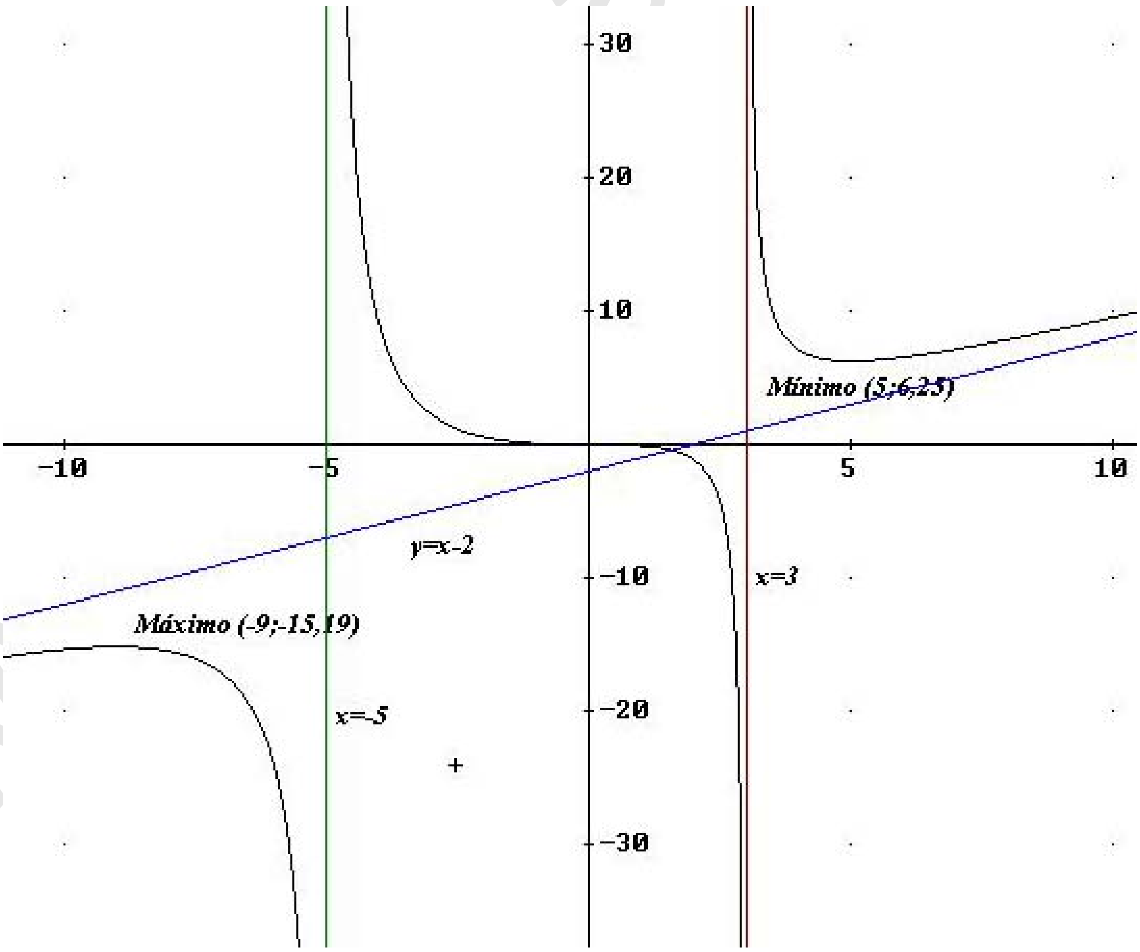
   (e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -9$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-9; -15, 19)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5; 6, 25)$

2. **Asíntotas:**

   - **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -5^-} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -5^+} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -5$$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 3$$



- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=\infty\Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

- **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2-15x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-nx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-15}-x\right)=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x^2+15}{x^2+2x-15}=-2$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.

Problema 201 Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y la recta $y = 2x + 1$

1. Calcular los extremos relativos de $f(x)$.
2. Estudiar la concavidad de $f(x)$.
3. Dibujar las gráficas de la función, de la recta, y señalar el recinto que encierran.
4. Calcular el área de dicho recinto.
5. Calcular la recta tangente y la recta normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

1. **Extremos relativos:**

$$f'(x)=3x^2-2=0\Longrightarrow x=-\frac{\sqrt{6}}{3},\ x=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$f''(x)=6x\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} f''\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-2\sqrt{6}<0\Longrightarrow \text{Mínimo}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right)\\ \\ f''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}>0\Longrightarrow \text{Máximo}\ \left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right)\end{array}\right.$$

2. **Concavidad:**
   Observando la derivada $f''(x) = 6x$ nos damos cuenta que $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y, por tanto, en este intervalo la función será convexa. Por el contrario, $f''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, por tanto, en este intervalo la función es cóncava.

3. **Dibujo de las gráficas:**
   De la función $f(x)$:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R$

   (b) **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow$

   $$\Longrightarrow (-1,618033988; 0),\ (0,6180339887; 0),\ (1, 0)$$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + 1 = -x^3 + 2x + 1 \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:** No es necesaria

   (e) **Asíntotas:** No hay

   De la recta $y = 2x + 1$:

   Con dos puntos de ella tendremos suficiente, por ejemplo el $(0, 1)$ y el $(-1/2, 0)$.

4. **Cálculo del área:**
   Para calcular el área de este recinto calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

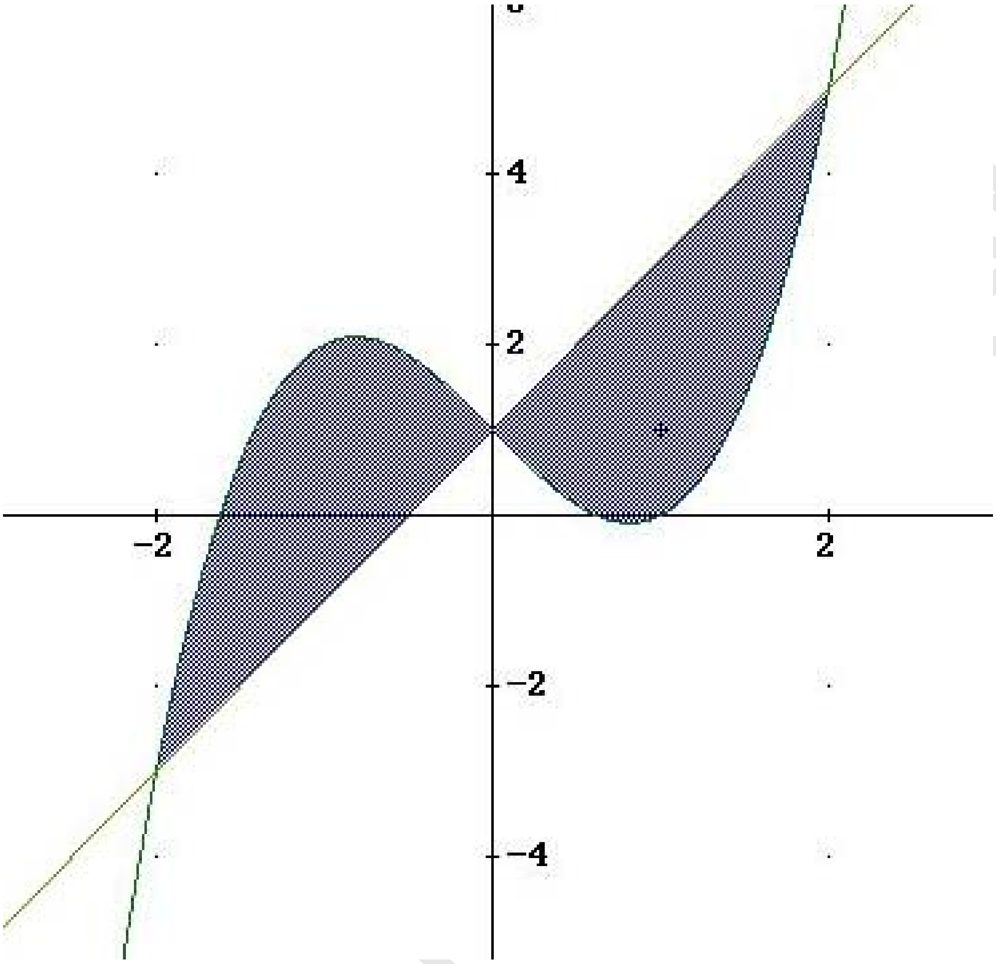
   $$x^3 - 2x + 1 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -2,\ x = 2,\ x = 0$$

   Tendremos que calcular el área en el intervalo $[-2, 0]$ y luego en el intervalo $[0, -2]$. Calculamos la integral

   $$\int (x^3 - 2x + 1 - 2x - 1)\, dx = \int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

   En el intervalo $[-2, 0]$:

   $$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big]_{-2}^{0} = 4$$



En el intervalo $[0,2]$:

$$\int_0^2 (x^3-4x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2 = -4$$

La razón por la que el área en este caso es negativa es porque la recta está por encima de la función, tendremos que coger su valor absoluto y nos queda:

Área$= |4|+|-4| = 8$ u^2.

5. **Cálculo de la tangente y la normal:** Para calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ calculamos su derivada primera

$$f'(x)=3x^2-2 \Longrightarrow m=f'(2)=10$$

Por otra parte $f(2)=5$ y tendremos que la ecuación de la **recta**

tangente es
$$y - 5 = 10(x - 2)$$
y la ecuación de la **recta normal** es
$$y - 5 = -\frac{1}{10}(x - 2)$$

Problema 202 Sea la función
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 12}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:
   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-4, 3\}$
   (b) **Puntos de Corte:**
      - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
      - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + (-x) - 12} = \frac{-x^3}{x^2 - x - 12} \neq \pm f(x)$$
   (d) **Monotonía:**
   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x - 36)}{(x^2 + x - 12)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -7,08,\ x = 5,08$$
   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2 + 2x - 36$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -7,08)$	$(-7,08, 5,08)$	$(5,08, +\infty)$
$x + 7,08$	$-$	$+$	$+$
$x - 5,08$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

(e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -7,08$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-7,08; -11,43)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5,08$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5,08; 6,94)$

2. **Asíntotas:**

- **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -4$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 3$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2+x-12} = \infty \Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

- **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

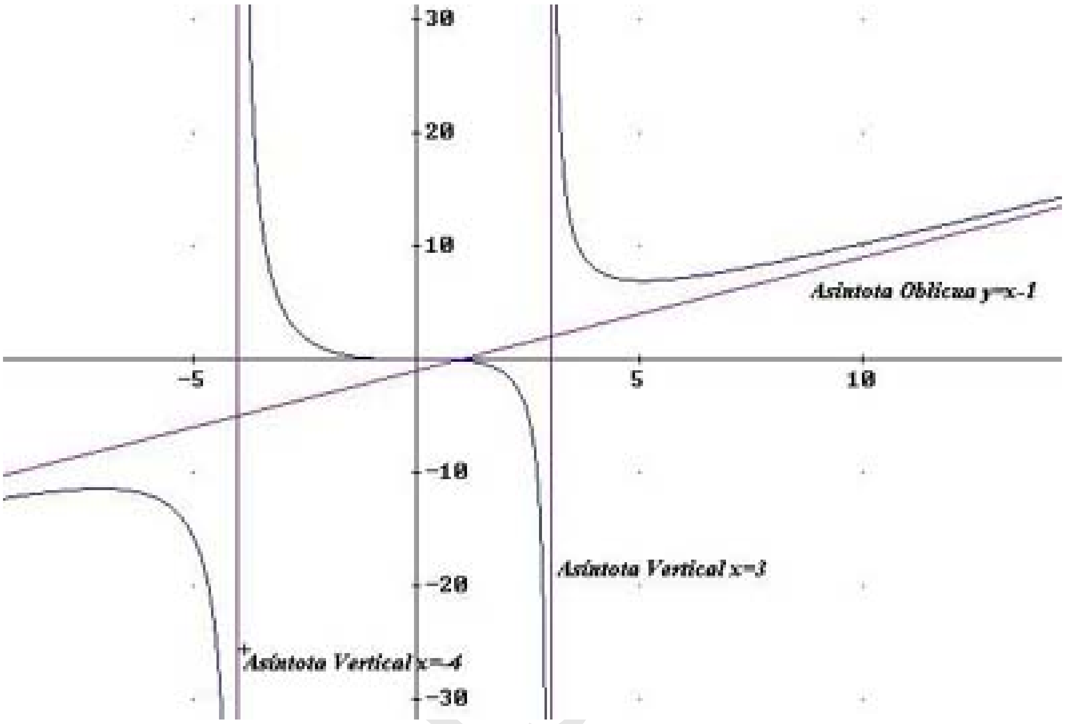
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x^2-12x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - nx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+x-12} - x \right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x^2+12}{x^2+x-12} = -1$$

La recta $y = x - 1$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.



Problema 203 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{1\}$
2. Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1}$$

   Luego ni es par ni es impar.

4.
   - **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

   - **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

   Luego no hay

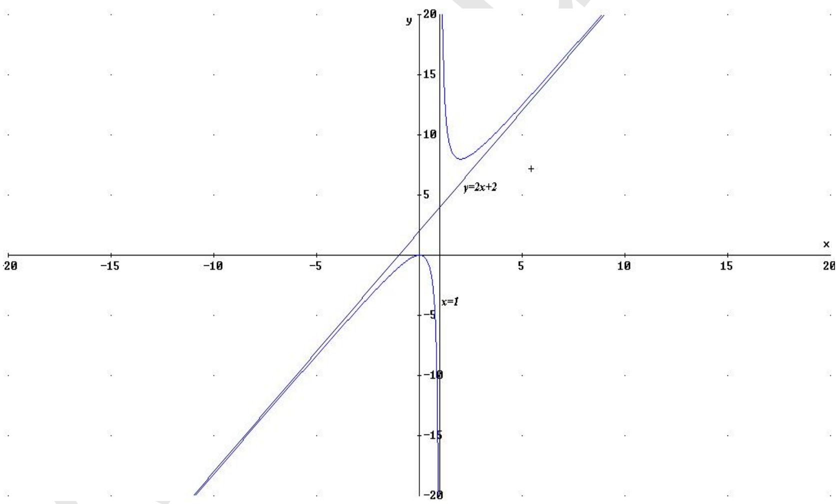
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-3} - 2x \right) = 2$$

$$y = 2x + 2$$

5.



Problema 204 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.

4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Representación gráfica aproximada.
8. Calcular el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$ y el eje OX.
9. Calcular la recta tangente y normal a $f(x)$ en $x = 2$

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 3\}$
2. Con el eje OY : No tiene

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (3/2, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{-2x - 3}{(-x)^2 + 3x}$$

   Luego ni es par ni es impar.
4. • **Verticales:** $x = 3$ y $x = 0$

   $$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = -\infty$$

   $$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = +\infty$$

   $$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

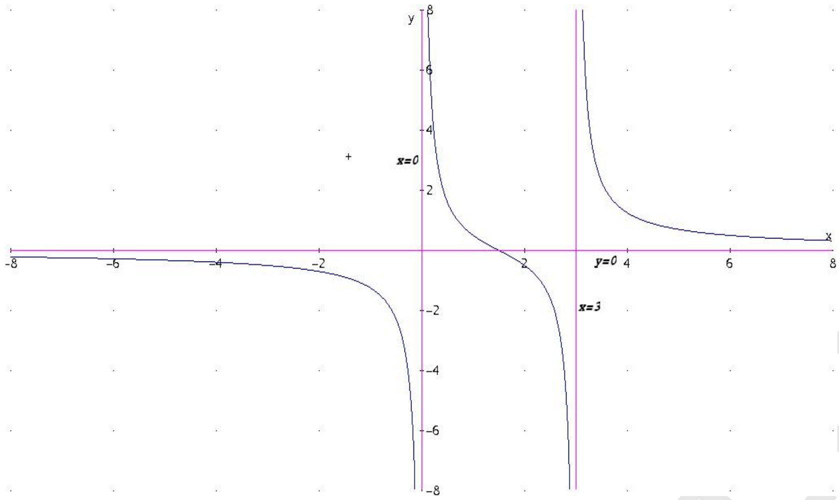
   $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

   • **Horizontales:**

   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$

   • **Oblicuas:** No Hay
5. $$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 9}{(x^2 - 3x)^2} < 0$$

   La función es siempre decreciente y por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.



6. No tiene.

7.

8.

$$\int_1^{3/2} \frac{2x-3}{x^2-3x}\,dx + \int_{3/2}^{2} \frac{2x-3}{x^2-x}\,dx =$$

$$\ln|x^2-3x|\Big]_1^{3/2} + \ln|x^2-3x|\Big]_{3/2}^{2} = 2\ln\left(\frac{9}{8}\right) = 0,2355660712$$

9.

$$f'(2) = -\frac{5}{4}, \quad f(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tangente}: \ y - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}(x-2)$$

$$\text{normal}: \ y - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}(x-2)$$

Problema 205 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.

6. Máximos y Mínimos.
7. Representación gráfica aproximada.
8. Calcular el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX.
9. Calcular la recta tangente y normal a $f(x)$ en $x = 2$

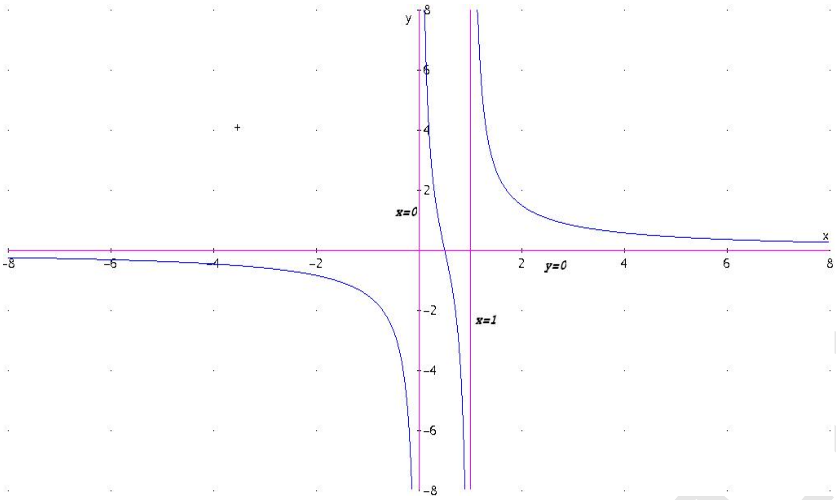
Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 1\}$
2. Con el eje OY : No tiene

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (1/2, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{-2x - 1}{(-x)^2 - x}$$

   Luego ni es par ni es impar.
4. - **Verticales:** $x = 1$ y $x = 0$
     $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
     $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
     $$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
     $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
   - **Horizontales:**
     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$
   - **Oblicuas:** No Hay
5. $$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2} < 0$$

   La función es siempre decreciente y por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.
6. No tiene.



7.

8.

$$\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x|\Big]_2^3 = \ln 3$$

9.

$$f'(2) = -\frac{5}{4},\quad f(2) = \frac{3}{2}$$

$$\text{tangente}:\ y - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}(x-2)$$

$$\text{normal}:\ y - \frac{3}{2} = \frac{4}{5}(x-2)$$

Problema 206 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Curvatura y puntos de inflexión
8. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{-1, 1\}$

2. Con el eje OY : $(0, 0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

3. $$f(-x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1}$$

   Luego es impar.

4. • **Verticales:** $x = 1$ y $x = -1$

   $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

   • **Horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

   Luego no hay

   • **Oblicuas:** $y = mx + n$

   $$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

   $$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) = 0$$

   $$y = x$$

5. $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

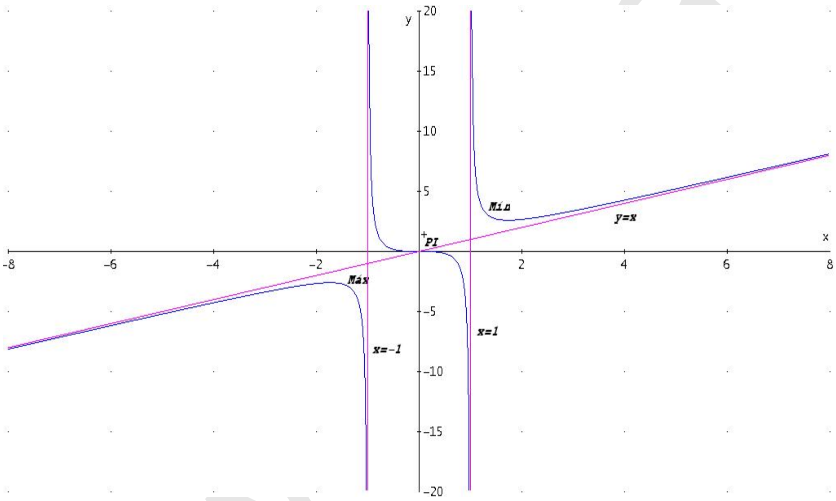
6. Máximo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\frac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

   Mínimo en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

7. $$f''(x) = \frac{x(2x^2+6)}{(x^2-1)^3}$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
cóncava	convexa	cóncava	convexa

   En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión.



Problema 207 Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x-2}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Curvatura y puntos de inflexión

8. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{2\}$
2. Con el eje OY : $(0, 0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{x^2}{-x-2}$$

   Luego no es ni par ni impar.
4. - **Verticales:** $x =$
     $$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \frac{16}{0^+} = +\infty$$
     $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \frac{16}{0^-} = -\infty$$
   - **Horizontales:**
     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$
     Luego no hay
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$
     $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 2x} = 4$$
     $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{4x^2}{x^2 - 2x} - 4x \right) = 8$$
     $$y = 4x + 8$$
5. $$f'(x) = \frac{x(4x - 16)}{(x-2)^2} = 0$$

$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

6. Máximo en el punto $(0, 0)$

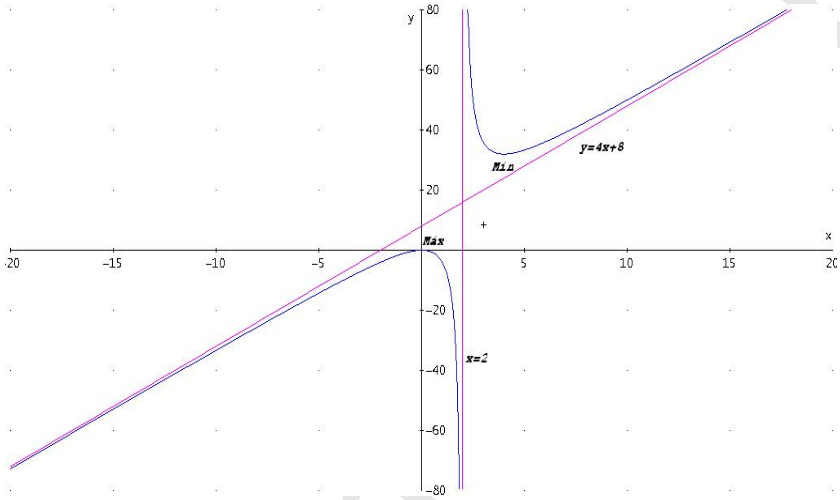
   Mínimo en el punto $(4, 32)$

7.

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$
cóncava	convexa

En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión, si lo será $x = 0$.



Problema 208 Dada la función $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60 = (x-1)(x+1)(x-5)$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -1$ y $x = 5$

2.

$$f''(x) = 36x^2 - 120x - 12 \Longrightarrow x = 3,43; \quad x = -0,09$$

$(-\infty, -0,09)$	$(-0,09, 3,43)$	$(3,43, \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 72x - 120 \Longrightarrow f'''(-0,09) \neq 0, \quad f'''(3,43) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -0.09$ y $x = 3,43$ son puntos de inflexión.

Problema 209 Dada la función $f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = (x+3)(x-1)(x-2)$$

$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -3$ y $x = 2$

2.

$$f''(x) = 12x^2 - 28 \Longrightarrow x = 1,53; \quad x = -1,53$$

$(-\infty, -1,53)$	$(-1,53; 1,53)$	$(1,53; \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 24x \Longrightarrow f'''(-1,53) \neq 0, \quad f'''(1,53) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -1,53$ y $x = 1,53$ son puntos de inflexión.

Problema 210 Dada la función $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos. Dibujo aproximado de la gráfica.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. (a) Dominio: La función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ está compuesta por el producto de dos funciones, la función $h(x) = x$ cuyo dominio es todo el eje de abcisas, y la función $t(x) = \sqrt{4-x^2}$ cuyo dominio está definido por la incuación $4 - x^2 \geq 0$. La solución de esta inecuación será: $-x^2 \geq -4 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$. En conclusión podemos asegurar que el dominio de la función pedida será el intervalo $[-2, 2]$.

   (b) Puntos de corte con los ejes: Los puntos de corte con el eje de abcisas vendrán determinados cuando $f(x) = 0$, es decir, $x\sqrt{4-x^2} = 0$, ecuación que nos produce las soluciones: $x = 0$, $x = 2$, y $x = -2$. Por tanto la gráfica cortará al eje de abcisas en los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$ y en el $(-2, 0)$. Ahora calculamos los cortes con el eje de ordenadas, es decir, hacemos $x = 0$, lo que nos produce una única solución que ya habíamos obtenido antes, y es el punto $(0, 0)$.

   (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Para ello calculamos la primera derivada, que sería la siguiente:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}(4-x^2)^{-1/2}(2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

   Ahora tendremos que ver cuando esta derivada es positiva, es nula, o es negativa. Para ello igualamos la derivada a cero, lo que nos daría lo siguiente:

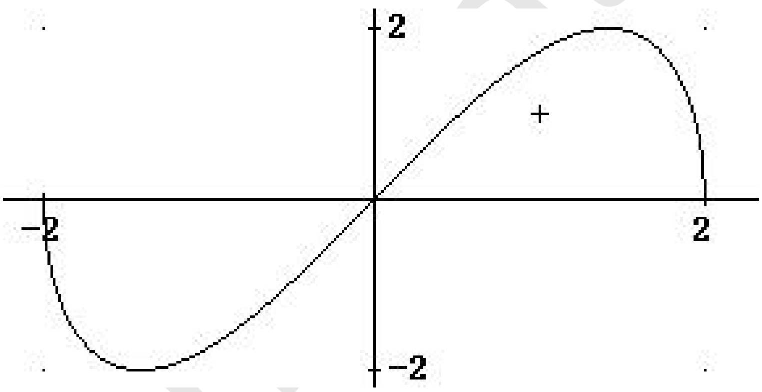
$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow 4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

   Ahora, recordando los puntos de corte con los ejes, el dominio de la función y observando que el denominador es siempre positivo, es fácil comprobar lo que nos piden.
   Entre $x = -2$ y $x = -\sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[-2, -\sqrt{2}]$
   Entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace positivo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
   Entre $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[\sqrt{2}, 2]$

(d) A la vista del apartado anterior, está claro que, la función tiene un mínimo en $-\sqrt{2}$ y un máximo en $\sqrt{2}$, resultados que al sustituidos en la función original darían los puntos: Mínimo= $(-\sqrt{2}, -2)$ y Máximo= $(\sqrt{2}, 2)$

(e) Para dibujar la gráfica ordenamos los resultados en una tabla, y los interpretamos cuidadosamente.

x	f(x)	
0	0	
2	0	
-2	0	
$-\sqrt{2}$	-2	Mínimo
$\sqrt{2}$	2	Máximo



2. Los puntos de corte con el ejes de abcisas son -2, 0, 2. La función es impar, es decir, simétrica respecto al origen, esto se aprecia fácilmente en su representación gráfica. Esto último se puede demostrar comprobando $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

Esto quiere decir que el área que encierra la curva entre el punto $(-2, 0)$ y el $(0, 0)$ es igual que el área que encierra la curva entre los puntos $(0, 0)$ y el $(2, 0)$. Por tanto bastará con calcular una de estas áreas y multiplicar por 2.

$$A = 2\int_0^2 f(x) = 2\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}dx$$

Resolveremos por sustitución.
$u = 4 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{du}{2}$ y sustituyendo nos

queda la integral siguiente:

$$\int x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{u^{3/2}}{3} + C$$

y deshaciendo el cambio de variable nos quedaría:

$$A = 2\left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = 2\left[\frac{4^{3/2}}{3}\right] = \frac{16}{3}$$

Problema 211 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

se pide:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Dibujo aproximado de la gráfica.

Nota: Una función es simétrica respecto al eje Y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$.
Solución:

1. D=$\{x \in R$ tales que $x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. (a) Puntos de corte con el eje Y:
   $x = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la gráfica corta al eje Y en $(0, -\frac{3}{4})$.

   (b) Puntos de corte con el eje X:
   $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la gráfica no corta al eje X en ningún punto.
3. $f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+3}{x^2-4} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje Y.

4. $$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

   Como $(x^2-4)^2 \geq 0$ para cualquier x, bastará estudiar el signo del numerador:

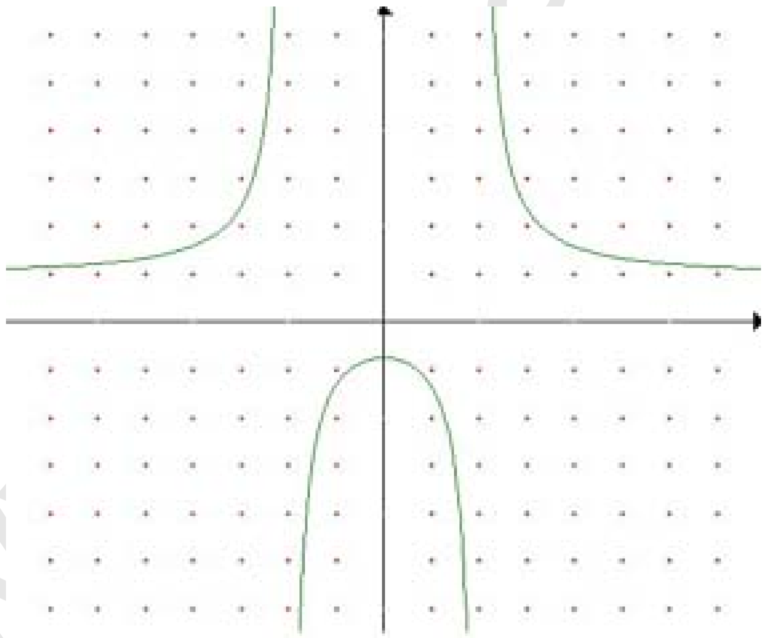
   (a) Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente.

   (b) Si $x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente.

   En el dominio de la función tendremos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. $f'(x) = 0 \Longrightarrow -14x = 0 \Longrightarrow x = 0$ que corresponde al punto $(0, -\frac{3}{4})$, punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, estamos ante un máximo.

6. Su representación gráfica sería:



   Calculado las asíntotas, las habríamos encontrado verticales en $x = -2$ y $x = 2$, y horizontales en $y = 1$, ya que $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$.

Problema 212 Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva

$$y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se pide:

1. Dominio de definición.
2. Simetría.
3. Cortes a los ejes.
4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Representación aproximada.

Solución:

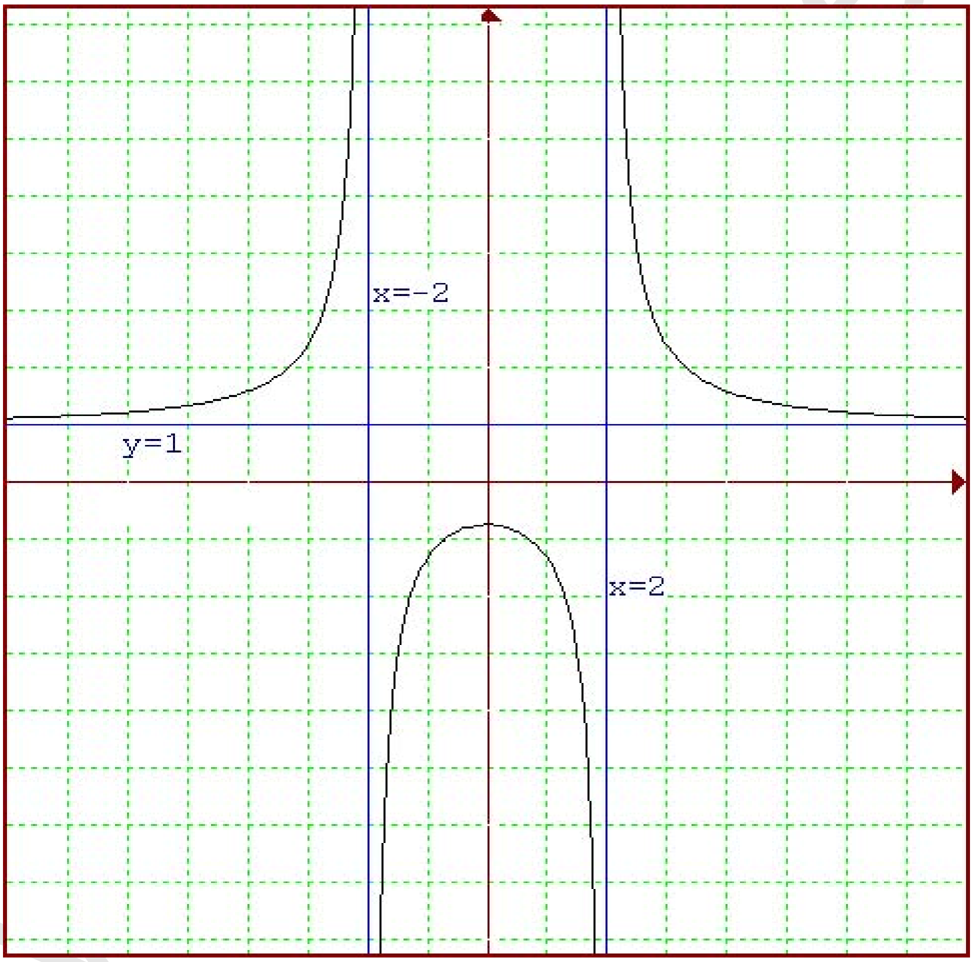
1. El dominio será toda la recta real, excepto en aquellos puntos el los que se anula el denominador, dicho de otra manera será $D = \{x \in R;\ x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x)$
   Luego la función es par, y por tanto simétrica respecto al eje Y.

3. Con el eje X hacemos $y = 0$ y nos queda:
   $0 = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Longrightarrow\ x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje X.
   Con el eje Y hacemos $x = 0$ y nos queda:
   $f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

4. Asíntotas:

   - Verticales:
     $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = 2$ es una asíntota vertical
     $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = -2$ es una asíntota vertical
   - Horizontales:
     $\displaystyle y = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 \Longrightarrow\ y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - Oblicuas:
     $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, entoces $\displaystyle a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} =$
     $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2 + 3}{x(x^2 - 4)} = 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas oblicuas.



x=-2
y=1
x=2

5. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos la primera derivada:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2-4)^2}$$

Para que exista un punto crítico imponemos que $y' = 0$ y nos queda:

$$\frac{14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow 14x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Analizamos el signo de y':

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
signo y'	$+$	$+$	$-$	$-$
y	**creciente**	**creciente**	**decreciente**	**decreciente**

En resumen:

- La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$
- La función decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

6. Observamos que en el punto de abcisa $x = 0$ la curva pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, en el punto $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ tiene un máximo.

7. Representación gráfica:

Problema 213 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

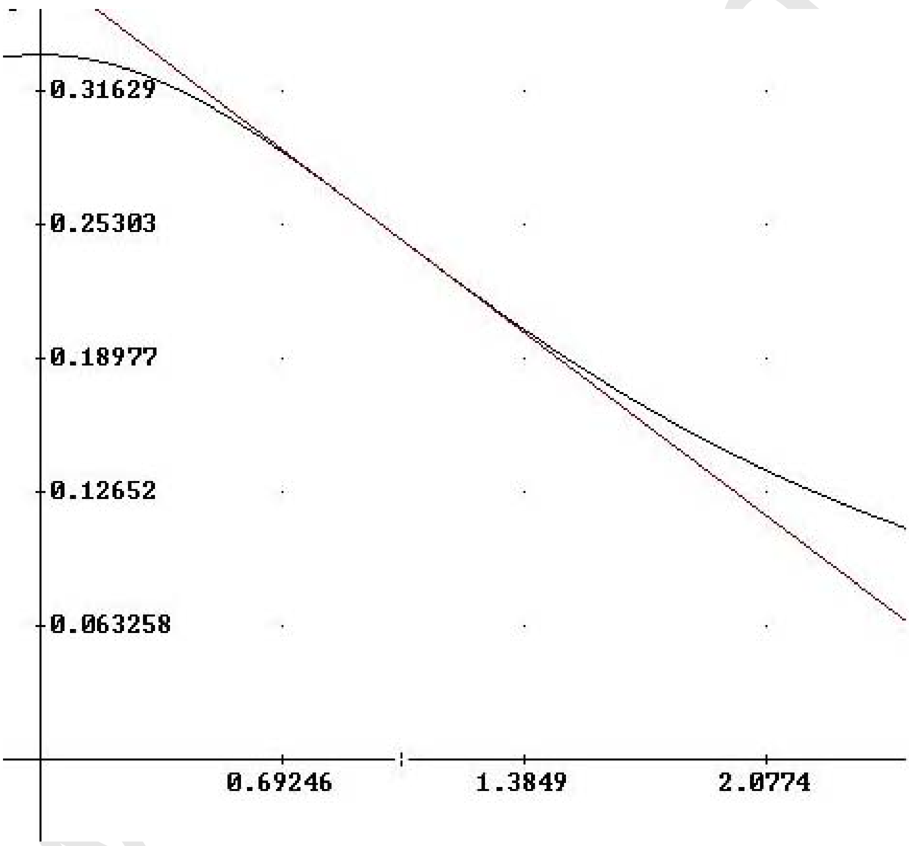
1. Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.
2. Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

1. Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$


0.31629
0.25303
0.18977
0.12652
0.063258
0.69246
1.3849
2.0774

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2 + 3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

2. El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3}\,dx + \int_1^3 \frac{3 - x}{8}\,dx$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 3}\,dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3}\,dx + \int_1^3 \frac{3 - x}{8}\,dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 + \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{1}{4}$$

Problema 214 Se considera la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^2+3x+1}{x} & si & x \geq -1 \\ & & \\ \frac{2x}{x-1} & si & x < -1 \end{array} \right.$$

1. (Estudiar el dominio y la continuidad de f.

2. Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

3. Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

1. Calculamos el dominio:

   - Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
   - Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
   - En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

   Calculamos la continuidad:
   La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

   - En $x = -1$:
   $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = 1$$
   $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$
   $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$
   Luego f es continua en $x = -1$.
   - En $x = 0$:
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
   Luego no es continua en $x = 0$.
   - En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

   - Cuando $x \geq -1$:
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:
  No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

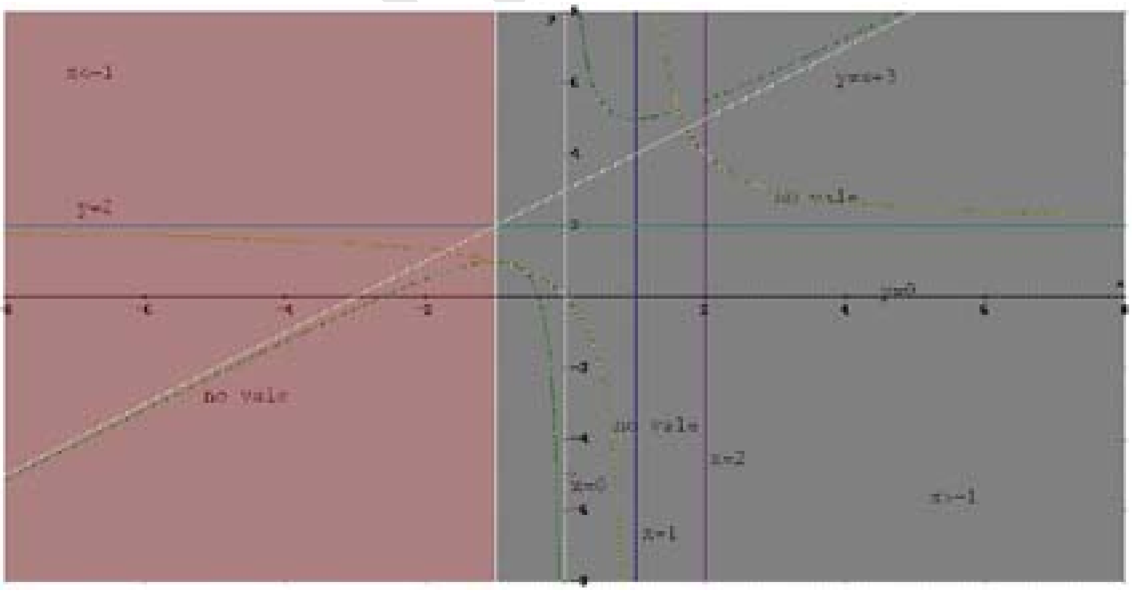
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

  Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$



- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x} dx = \int_1^2 (x + 3 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln |x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

Problema 215 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2 + 1}}$$

1. Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
3. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No tiene, ya que el dominio de la función es todo R.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

2. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Que serían los puntos $(1, e)$ y $(-1, e^{-1})$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

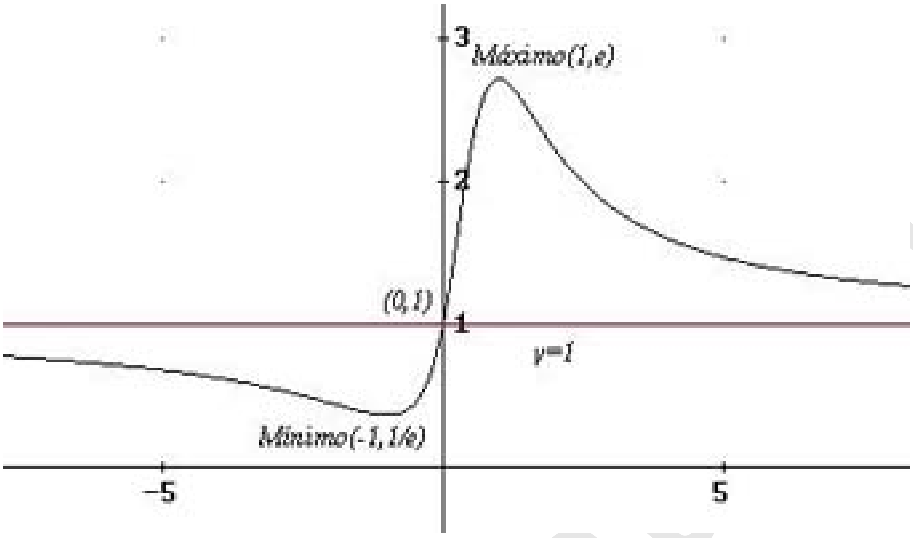
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo y lo mismo ocurre con $e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, el estudio del signo se reduce al de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1 - x$	$+$	$+$	$-$
$1 + x$	$-$	$+$	$+$
$(1 - x)(1 + x)$	$-$	$+$	$-$
	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(1, e)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(-1, e^{-1})$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

3. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$ único punto de corte, ya que con el eje de abcisa no habría ninguno.



Problema 216 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0, 1\}$
2. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$

     Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

     $$\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$

     Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
  Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{9x-3}{x^2-2x}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2}$$

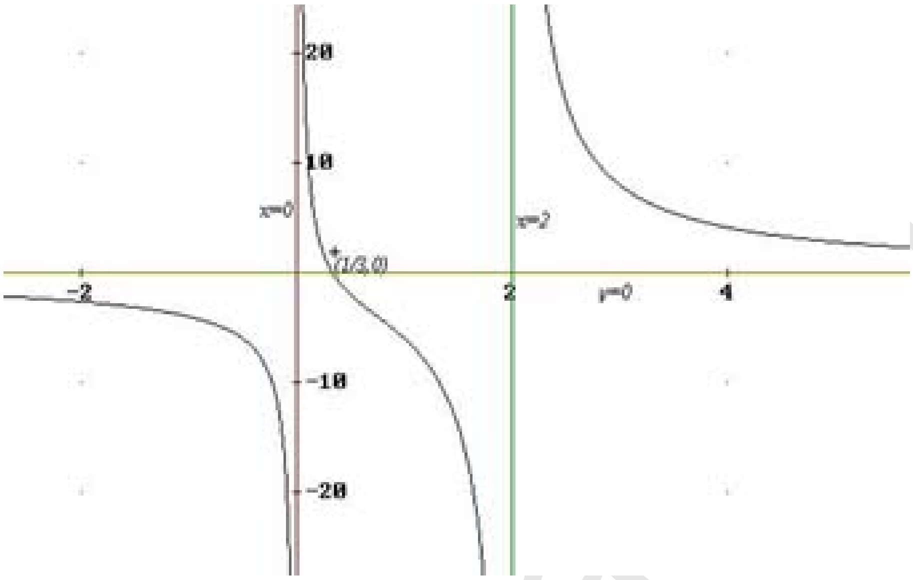
Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $3x^2 - 2x + 2$, que es siempre positivo. Luego $f'(x) < 0$ y por tanto la función es siempre decreciente.

4. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $y = 0 \Longrightarrow (1/3, 0)$ único punto de corte, ya que con el eje de ordenadas no habría ninguno.

Problema 217 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$$

1. Calcular el dominio de f.



2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f

3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.

4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $\dfrac{x^2-2}{2x-1} < 0$

$$Dom(f) = \left\{ x \in R : \frac{x^2-2}{2x-1} > 0 \right\}$$

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 1/2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1/2} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \pm\infty$$

   Luego $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = -\infty$$

   Luego $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ son asíntotas verticales.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \infty$$

Luego no tiene asíntotas horizontales.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)} = 0 \Longrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del numerador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $(x^2-2)(2x-1)$, que es siempre positivo en este dominio. Luego $f'(x) > 0$ y por tanto la función es siempre creciente.

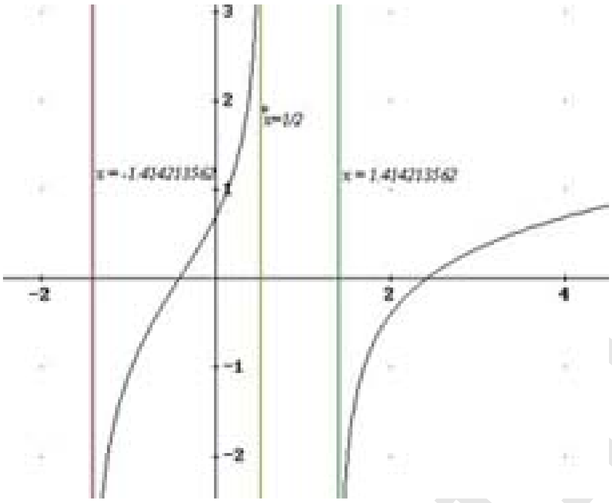
4. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-2}{2x-1} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

- Con el eje de ordenadas

$$x = 0 \Longrightarrow y = \ln 2$$



- Los puntos son

$$(0, \ln 2);\ (1+\sqrt{2}, 0);\ (1-\sqrt{2}, 0)$$

Problema 218 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los máximos y mínimos de f.
4. Determina los puntos de inflexión de f.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $x^3 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0\}$
2. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-1}{x^3} = \pm\infty$$

   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igualamos a cero

$$f'(x) = \frac{3-x^2}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$$

Para comprobar si son máximos o mínimos recurrimos a la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} \Longrightarrow \begin{cases} f''(\sqrt{3}) < 0 \\ f''(-\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$

Tenemos un mínimo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

Tenemos un máximo en $\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

4. Para calcular los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 0$

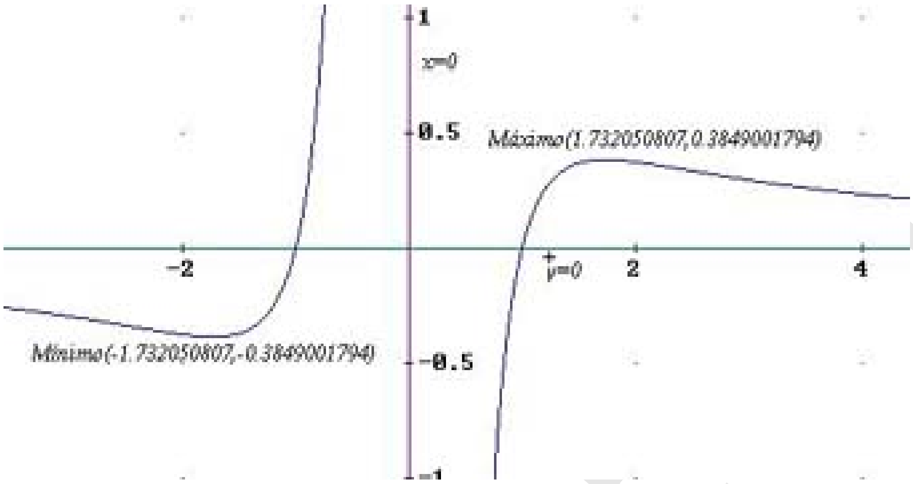
$$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} = 0 \Longrightarrow x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{6\sqrt{6}}\right) \\ \\ \left(\sqrt{6}, \frac{5}{6\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

5. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



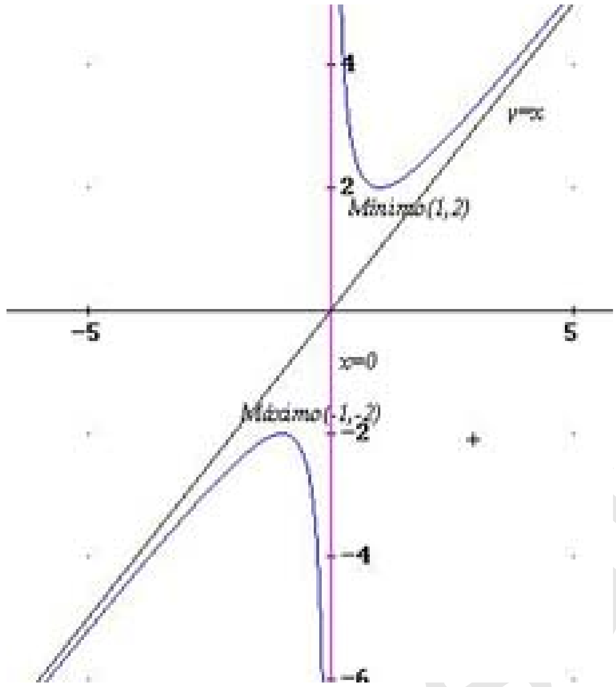
- Con el eje de ordenadas no hay puntos de corte
- Los puntos son
$$(1,0);\ (-1,0)$$

Problema 219 Representa gráficamente la curva $y = x + \dfrac{1}{x}$. Para ello calcula asíntotas, puntos criticos e intervalos de crecimiento.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$
   La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$
   Luego no hay asíntotas horizontales.
   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
   $$a = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$
   $$b = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} - x\right) = 0$$
   Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.



2. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

   Que serían los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$

   - **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

   $$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

   Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo, el estudio del signo se reduce al de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$(x - 1)(x + 1)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(-1,-2)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(1,2)$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

Problema 220 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1. Calcular el dominio de f y puntos de corte si los hay.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Simetrías.
4. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R$.

   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

     $$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$

     Luego los puntos de corte son $(1,0)$ y $(-1,0)$.
   - **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1$, luego el punto de corte es $(0,-1)$.

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No hay ningún valor que anule el denominador de esta fracción y, por tanto, no tiene asíntotas verticales.
   - **Asíntotas horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

     Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

     $$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = 0$$

     Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$$

   Luego la función es simétrica respecto al eje OY.

4. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow 4x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ f(0) = -1$$

     Sólo queda por decidir si el punto $(0, -1)$ es un máximo o un mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

   - **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

     Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $4x$, que es positivo cuando $x > 0$, y por el contrario, es negativo cuando $x < 0$. En conclusión:
     Cuando $x < 0$ la función es decreciente.
     Cuando $x > 0$ la función es creciente.
     En el punto $(0, -1)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

5. Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

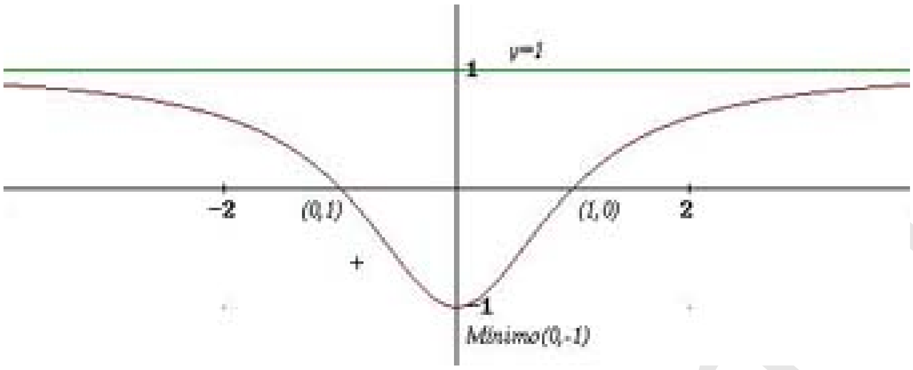
Problema 221 Resolver:

1. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

2. Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

1. El dominio de $y = e^{x+2}$ y $y = e^{-x}$ es todo R y, por tanto, no tienen asíntotas verticales; además son continuas y positivas. Por otro lado tenemos:



- $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{x+2} = e^{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{x+2} = e^{\infty} = \infty$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

Es decir, las dos funciones tienen una asíntota horizontal en común $y = 0$ y, por tanto, no tienen asíntotas oblicuas.

Los puntos de corte entre estas dos funciones serán el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, e)$$

Los puntos de corte entre la función $y = e^{x+2}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, e^2)$$

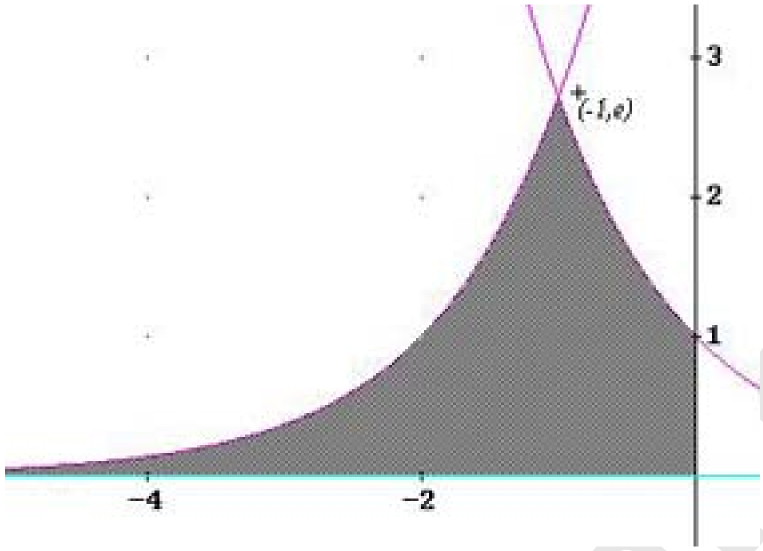
Los puntos de corte entre la función $y = e^{-x}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{-x} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, 1)$$

El área pedida vendrá dada por

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{x+2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\cdot e^{2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx =$$

$$e^2\left[e^x\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e^2(e^{-1} - 0) + (-e^0 + e) = 2e - 1$$



Problema 222 Dada la función $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$, se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. - **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $5 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.
   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

   $$x\sqrt{5-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow$$
   $$x = 0,\ \ x = \sqrt{5},\ \ x = -\sqrt{5}$$

   Luego los puntos de corte son $(0,0)$, $(-\sqrt{5},0)$ y $(\sqrt{5},0)$.
   - **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, luego el punto de corte es $(0,0)$.
   - **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

   $$f(-x) = (-x)\sqrt{5-(-x)^2} = -f(x)$$

   Luego la función es simétrica respecto al origen O.
   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

   $$f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 5-2x^2=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right), \ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$$

Sólo queda por decidir si estos puntos son máximos o mínimos, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x)=\frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), \ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \ \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right),$$

En conclusión:
Cuando $x \in \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ la función es decreciente
En el punto $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

En el punto $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo.

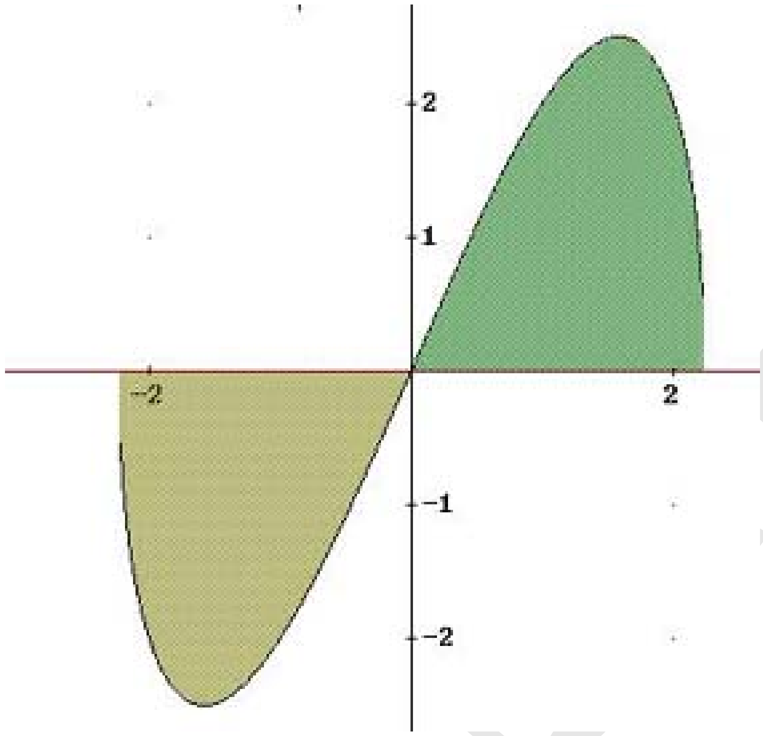
- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

2. Como la gráfica es simétrica respecto al origen el área buscada será el doble de la encerrada en el intervalo $[0, \sqrt{5}]$.

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}} 2x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(5-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{125}}{3}$$

Podemos concluir: **Área**$=\dfrac{2\cdot\sqrt{125}}{3}\ u^2$



Problema 223 Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución:

- **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

  Como $x = 1 - \sqrt{2}$ no pertenece al dominio, resulta que el único extremo es $x = 1 + \sqrt{2}$. Sólo queda por decidir si este punto es máximo o mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$(-\infty, -1), \ \left(1, 1+\sqrt{2}\right), \ \left(1+\sqrt{2}, \infty\right),$$

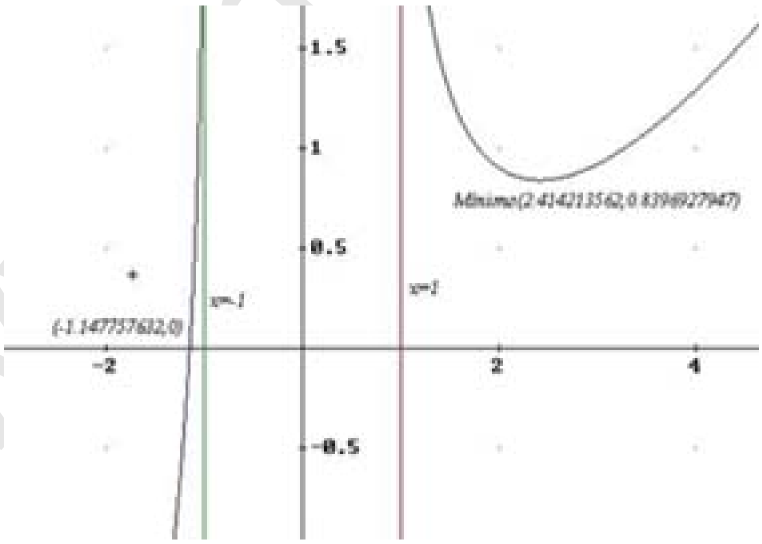
En conclusión:
Cuando $x \in (-\infty, -1)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(1, 1+\sqrt{2}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(1+\sqrt{2}, \infty\right)$ la función es creciente
En el punto $(1+\sqrt{2}; 0.84)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

- **Concavidad:** Para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

Como la segunda derivada es siempre mayor que cero, la función es siempre cóncava.

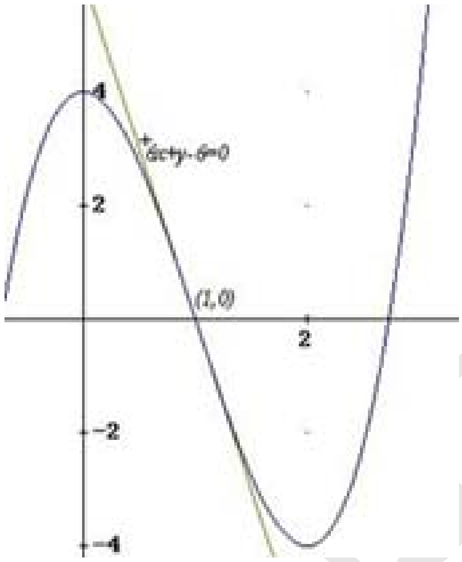
- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.



Problema 224 Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haga también su gráfica aproximada de la función en un entorno de ese punto.

Solución:

Para calcular el punto de inflexión tenemos que hacer $f''(x) = 0$.



$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ posible punto de inflexión. $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow$ podemos asegurar que es de inflexión, que será el $(1, 0)$. La pendiente de la recta tangente a esta función een este punto vale $m = f'(1) = -6$, luego la ecuación de la recta buscada es

$$y - 0 = -6(x - 1) \Longrightarrow 6x + y - 6 = 0$$

En un entorno de este punto la función pasará de cóncava a convexa o recíprocamente, habrá que ver también si en ese pequeño entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ la función es creciente.

	$(1-\varepsilon, 1)$	$(1, 1+\varepsilon)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	decreciente	decreciente

	$(1-\varepsilon, 1)$	1	$(1, 1+\varepsilon)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	convexa	PI	cóncava

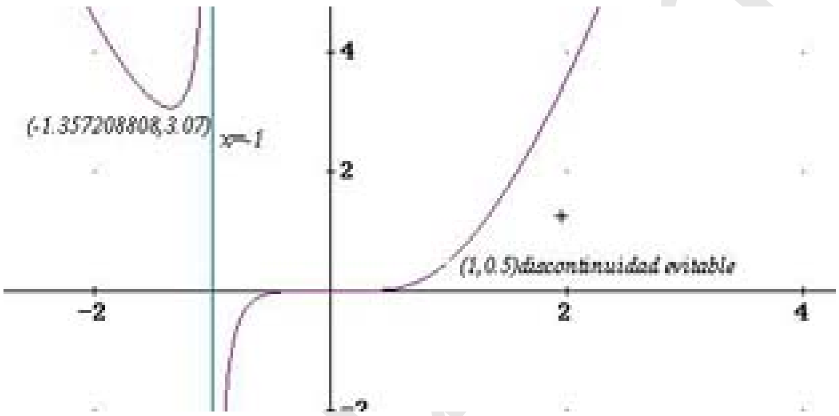
Con estos datos se puede dibujar la gráfica.

Problema 225 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

1. Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
2. Estudiar sin f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:



1. Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

2. Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 226 .

1. Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$
2. Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.
3. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

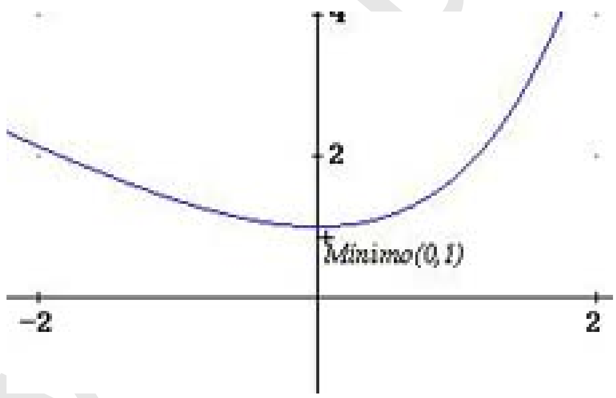
1. El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0,1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.



2.

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

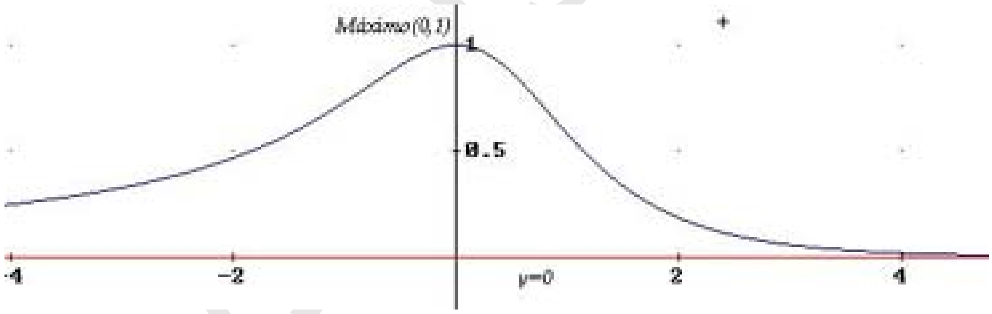
En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

3.

$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{(e^x - x)^3} = 0 \Longrightarrow 1 - e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x-4) + 2}{(e^x - x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un máximo.



Problema 227 Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

1. Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

2. Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

1. (a) **Asíntotas:**
   - **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=1\Longrightarrow y=1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

(b) Extremos:

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2}\Longrightarrow x=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,1/2)$	$(1/2,+\infty)$
$x+1/2,08$	$-$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$\int\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx=\int\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx=$$

$$=\int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$$

$$\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1=1-\frac{1}{2}\ln 5$$

Problema 228 Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$$

1. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
2. Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
3. ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

1.

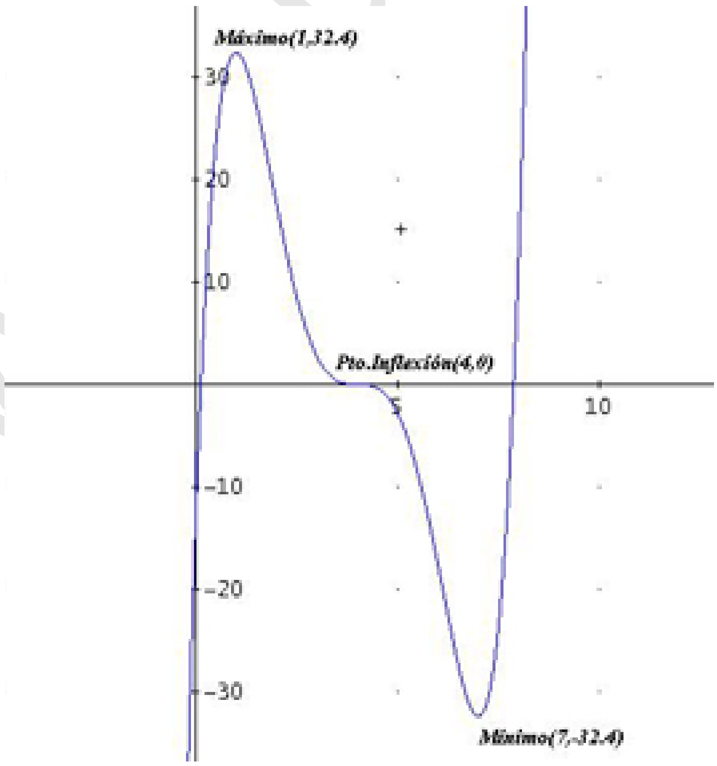
$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7) = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1, \;\; x = 7$$

Como $(x-4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2-8x+7 = (x-1)(x-7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1, 7)$.

2. Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\dfrac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.



3. Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

   $$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4,\ \ x = 1,8787,\ \ x = 6,1213$$

   Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4,0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

   $$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

   Luego se trata de un punto de inflexión.

Problema 229 Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

1. Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
2. Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

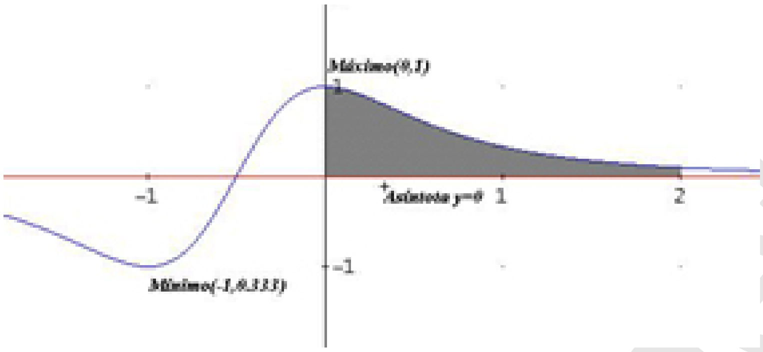
Solución:

1. **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ \ x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

   En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0,1)$.

   Asíntotas:



- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=0\Longrightarrow y=0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

2.

$$\int_0^2\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{x^2+x+1}\bigg]_0^2=\frac{6}{7}$$

Problema 230 Calcular un polinomio de tercer grado $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x=1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx=\frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x)=3ax^2+2bx+c\Longrightarrow p'(1)=3a+2b+c=0$$
- $$p''(x)=6ax+2b\Longrightarrow p''(0)=2b=0\Longrightarrow b=0$$
$$p(0)=d=1$$

- $$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \left.\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4}+\frac{c}{2}+1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a+2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a+c = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{5}, \;\; c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{5}x+1$$