Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2025

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-5,0)$, $B(0,4)$ y $C(6,0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

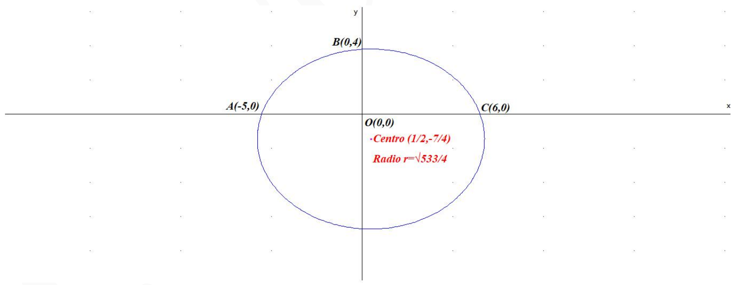
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -5m + p = -25 \\ 4n + p = -16 \\ 6m + p = -36 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -1 \\ n = 7/2 \\ p = -30 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - x + \frac{7}{2}y - 36 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = -1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2} \\ n = -2b = \dfrac{7}{2} \Longrightarrow b = -\dfrac{7}{4} \\ p = -30 = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \dfrac{\sqrt{533}}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right), \quad r = \frac{\sqrt{533}}{4}$$



Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

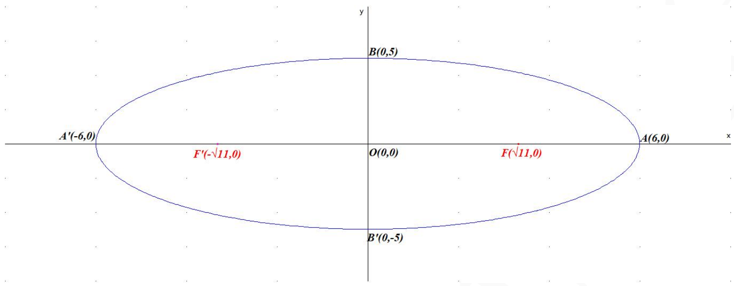
Solución:

$$a^2 = 36 \Longrightarrow a = 6, \quad b^2 = 25 \Longrightarrow b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{11} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

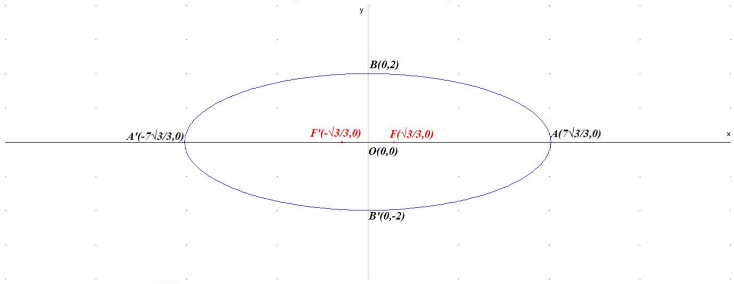
Eje Mayor$= 2a = 12$
Eje Menor$= 2b = 10$

Distancia Focal$= 2c = 2\sqrt{11}$
Excentricidad$= e = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$
Vértices: $A(6,0)$, $A'(-6,0)$, $B(0,5)$, $B(0,-5)$
Focos: $F\left(\sqrt{11},0\right)$, $F'\left(-\sqrt{11},0\right)$
Ecuación general: $25x^2 + 36y^2 = 900$



Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{7}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:



$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{7} \Longrightarrow a = 7c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 49c^2 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 7c = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Eje Mayor$= 2a = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$
Eje Menor$= 2b = 4$
Distancia Focal$= 2c = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{7}$

Vértices: $A\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3},0\right)$, $A'\left(-\dfrac{-7\sqrt{3}}{3},0\right)$, $B(0,2)$, $B'(0,-2)$
Focos: $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{49/3}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ecuación general: $12x^2+49y^2=196$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(1,1)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=25$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$
y sustituimos en la circunferencia:

$$(2+\lambda)^2+(2\lambda)^2=25 \Longrightarrow 5\lambda^2+2\lambda-24=0 \Longrightarrow \lambda_1=-2,5,\quad \lambda_2=1,7$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-2,5 \Longrightarrow P_1(-0,5;-5) \\ \lambda_2=1,7 \Longrightarrow P_2(0,3;3,4) \end{cases}$$

Problema 5 Se quiere construir una carretera cerrada alrededor de una finca para peligrosas pruebas experimentales de velocidad. Para construir esta estructura se sitúa el material en los puntos $(4,0)$ y $(0,4)$. La suma de las distancias desde cualquier punto del camino a estos dos puntos tiene que ser constante e igual a 10 u, de esa manera el acceso a los materiales de construcción es óptimo. Con estos datos se pide:

a) Identifica la curva descrita por la carretera.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Hay que hacer drenajes cuando $x=2$, calcular los puntos de drenaje y las tangentes a la curva en esos puntos.

d) En caso de explosión de algún bólido en cualquier punto de la curva, se produciría la destrucción de lo construido en un círculo de 2 u. Queremos poner un valioso objeto en el punto $(1,1)$, ¿sería aconsejable?
$u=100$ metros.

Solución:

a) Se trata de una elipse por definición.

b) Sea $P(x, y)$ un punto de esa elipse, sean $F(4, 0)$ y $F'(0, 4)$ sus focos, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{FP}| + |\overrightarrow{F'P}| = 10 \Longrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 10$$

$$(x-4)^2 + y^2 = (10 - \sqrt{x^2 + (y-4)^2})^2 \Longrightarrow$$

$$21x^2 + 21y^2 + 8xy - 100x - 100y - 225 = 0$$

c) Si $x = 1 \Longrightarrow 21y^2 - 84y - 341 = 0 \Longrightarrow y_1 = -2,5$ e $y_2 = 6,5$. Los puntos en los que tenemos que calcular las tangentes son $H(2; 6, 5)$ y $Q(2; -2, 5)$. Calculamos la derivada de la función:

$$42xdx + 42ydy + 8ydx + 8xdy - 100dx + 100dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(42x + 8y - 100)dx + (42y + 8x - 100)dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(42y + 8x - 100)dy = -(42x + 8y - 100)dx \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{42x + 8y - 100}{42y + 8x - 100}$$

La pendiente m_1 de la recta pendiente en $Q(2; -2, 5)$ es:

$$m_1 = -0, 19$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y + 2, 5 = -0, 19(x - 2)$$

La pendiente m_2 de la recta pendiente en $H(2; 6, 5)$ es:

$$m_2 = -0, 19$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y - 6, 5 = -0, 19(x - 2)$$

d) El objeto no corre peligro por esta circunstancia.
Si trazamos una circunferencia de cetro $(1, 1)$ y radio 2 no llega a cortar a la curva en ningún punto.