Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Enero 2025

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -8 - 3i$ y $z_2 = 1 + 7i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = -7 + 4i$ y $z_1 - z_2 = -9 - 10i$

b) $z_1 \cdot z_2 = 13 - 59i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{29}{50} + \dfrac{53}{50}i$

Problema 2 Si $z = -1 + 7i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = -3 + 5i = \sqrt{50}_{98^\circ 7' 48''} = 5\sqrt{2}(\cos 98^\circ 7' 48'' + i \sin 98^\circ 7' 48'')$$

$$z^{10} = (-1 + 7i)^{10} = 50^5_{10 \cdot 98^\circ 7' 48''} = 34^5_{981^\circ 18' 4''} = 50^5_{261^\circ 18' 4''} =$$

$$50^5(\cos 261^\circ 18' 4'' + i \sin 261^\circ 18' 4'') = (-47263488 - 308905184i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-2 + 5i}$

Solución:

$$z = -2 + 5i = \sqrt{29}_{111^\circ 48' 5''} = \sqrt{29}(\cos 111^\circ 48' 5'' + i \sin 111^\circ 48' 5'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[6]{29}_{27^\circ 16' 2''} = \sqrt[6]{29}(\cos 27^\circ 16' 2'' + i \sin 27^\circ 16' 2'') \\ \sqrt[6]{34}_{147^\circ 16' 2''} = \sqrt[6]{29}(\cos 147^\circ 16' 2'' + i \sin 147^\circ 16' 2'') \\ \sqrt[6]{34}_{267^\circ 16' 2''} = \sqrt[6]{29}(\cos 267^\circ 16' 2'' + i \sin 267^\circ 16' 2'') \end{cases}$$

Problema 4 Sean $A(-5, -2)$, $B(3, 0)$ y $C(1, 9)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

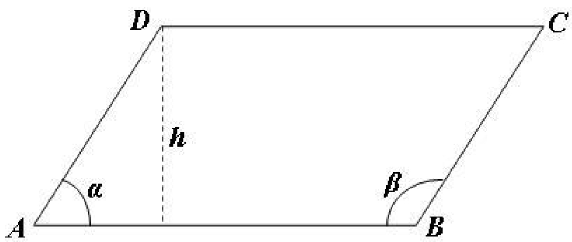
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (-5, -2) + (-2, 9) = (-7, 7)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8, 2)| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(-2, 9)| = \sqrt{85}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{-16+18}{2\sqrt{17}\cdot\sqrt{85}} \Longrightarrow \alpha = 88^\circ 29' 33''$ y $\beta = 91^\circ 30' 27''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\left(-2, \dfrac{7}{2}\right)$

f)
$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\alpha = 9,2164\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}|\cdot h = 76\ u^2$

h) $C = \dfrac{A+A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (7, 20)$

i) $\overrightarrow{AC} = (6, 11) \perp \overrightarrow{u} = (11, -6)$ y $\overrightarrow{w} = \dfrac{7}{\sqrt{157}}(11, -6) = \left(\dfrac{77\sqrt{157}}{157}, -\dfrac{42\sqrt{157}}{157}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(2, \frac{11}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-5, -2) + \left(2, \frac{11}{3}\right) = \left(-3, \frac{5}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(-3, \frac{5}{3}\right) + \left(2, \frac{11}{3}\right) = \left(-1, \frac{16}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(-1, \frac{16}{3}\right) + \left(2, \frac{11}{3}\right) = (1, 9)$$