

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2024

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
 - ☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 25 = 0 \implies (\pm 5, 0)$.
 - ☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 25 \implies (0, 25)$.
- | | | | | | |
|-------|-----------------|------------|-----------|----------|----------------|
| | $(-\infty, -5)$ | $(-5, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, 5)$ | $(5, +\infty)$ |
| signo | + | - | + | - | + |
- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

• **Verticales:**

$$x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^+} \right] = -\infty$$

$$x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^-} \right] = +\infty$$

• **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} = 1$$

• **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = \frac{48x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es creciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 25)$.

g)

$$f''(x) = -\frac{48(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

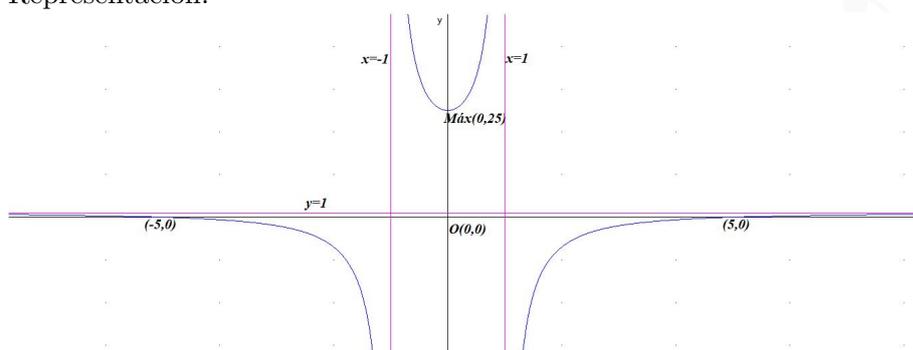
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪	convexa ∩

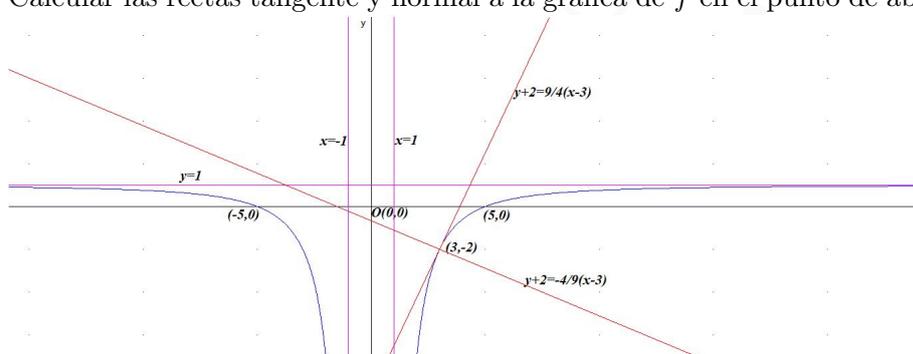
Convexa: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$:



Como $m = f'(3) = 9/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 2 = \frac{9}{4}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal : } y + 2 = -\frac{4}{9}(x - 3)$$

Como $f(3) = -2$ las rectas pasan por el punto $(3, -2)$.