# Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
**Abril 2024**

---

**Problema 1** (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{-2x}{x^2+4}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.

b) (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a $f$ en el punto de abcisa $x = 0$.

**Solución:**

a) Puntos de Corte

- ☛ Corte con el eje $OX$ hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ con $OX$.
- ☛ Corte con el eje $OY$ hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

$f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ la función es impar.

b) $f'(x) = \dfrac{2(x^2-4)}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

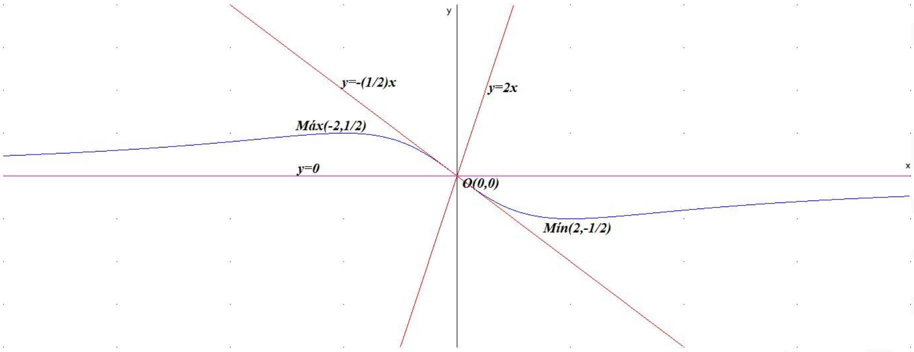
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, decreciente en el intervalo $(-2, 2)$ con un máximo relativo en $\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$

c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de $f$ en el punto de abcisa $x = 0$:
Como $m = f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y = -\frac{1}{2}x$$

$$\text{Recta Normal}: \ y = 2x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0,0)$.




**Problema 2** (2 puntos) Calcular $a$ y $b$ para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{2ax-b}{3} & \text{si} & x<-1\\ x+a & \text{si} & -1\le x<1\\ \dfrac{x-b}{2} & \text{si} & x\ge 1\end{array}\right.$$

**Solución:**

Continuidad en $x=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}\dfrac{2ax-b}{3}=\dfrac{-2a-b}{3}\\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(x+a)=-1+a\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-2a-b}{3}=-1+a\Longrightarrow 5a+b=3$$

Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x+a)=1+a\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{x-b}{2}=\dfrac{1-b}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{1-b}{2}=1+a\Longrightarrow 2a+b=-1$$

$$\left\{\begin{array}{l}5a+b=3\\ 2a+b=-1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=4/3\\ b=-11/3\end{array}\right.$$

**Problema 3** (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x^2+5x-14|$ y representarla gráficamente.

**Solución:**

Hacemos $g(x)=x^2+5x-14\Longrightarrow g'(x)=2x+5=0\Longrightarrow x=-5/2$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $-14$ |
| $-7$ | $0$ |
| $2$ | $0$ |
| $-5/2$ | $-81/4$ |

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$.
La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{5}{2}, \frac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 14 & \text{si} \quad x \le -7 \\ -(x^2 + 5x - 14) & \text{si} \quad -7 < x \le 2 \\ x^2 + 5x - 14 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

f es continua en $x = -7$:

$$\lim_{x \longrightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -7^-} (x^2 + 5x - 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -7^+} (-x^2 - 5x + 14) = 0$$

$$f(-7) = 0$$

Y $f$ es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 - 5x + 14) = 0$$

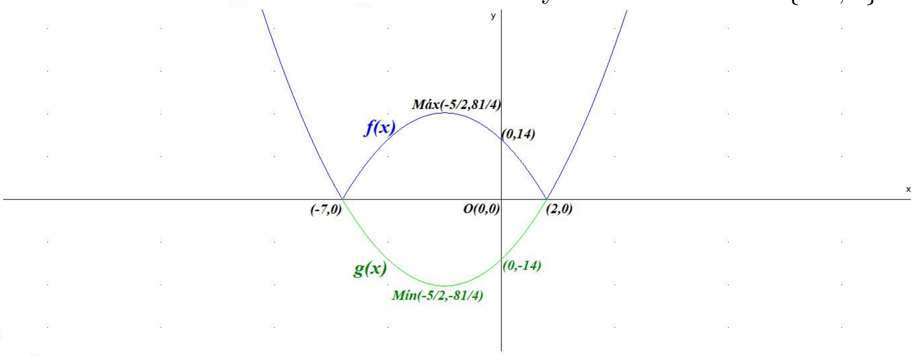
$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 + 5x - 14) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x \le -7 \\ -2x - 5 & \text{si} \quad -7 < x \le 2 \\ 2x + 5 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -7$: $f'(-7^-) = -9$ y $f'(-7^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -7$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -9$ y $f'(2^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-7, 2\}$.

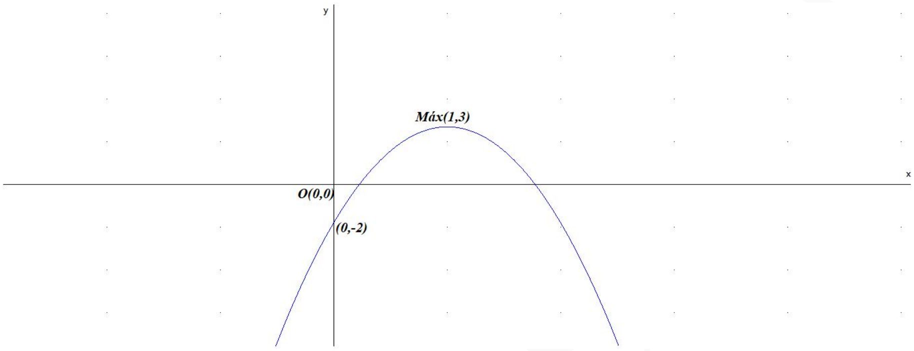


**Problema 4** (1 punto) Dada la función $f(x) = 3ax^2 - 2bx - c$, encontrar los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que la función pasa por el punto $(0, -2)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 3)$. Decidir de que extremo se trata.
**Solución:**

$$f(x) = 3ax^2 - 2bx - c \Longrightarrow f'(x) = 6ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -2 \Longrightarrow -c = -2 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow 3a - 2b - c = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 6a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -5/3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = -5x^2 + 10x - 2$
$f'(x) = -10x + 10$ y $f''(x) = -10 \Longrightarrow f''(1) = -10 < 0$ luego en $x = 1$ hay un máximo.




**Problema 5** (2 puntos) calcular dos números reales positivo que cumplan: el cuarado de su suma es 100 y el producto de ellos sea máximo.

**Solución:**
$(x + y)^2 = 100 \Longrightarrow x + y = 10 \Longrightarrow y = 10 - x$
$P(x, y) = xy \Longrightarrow P(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$
$P'(x) = -2x + 10 = 0 \Longrightarrow x = 5.$
$P''(x) = -2 \Longrightarrow P''(5) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 5$ es un máximo relativo.
Los números pedidos son $x = 5$ e $y = 10 - 5 = 5$.
El producto máximo sería $P(5) = -25 + 50 = 25$