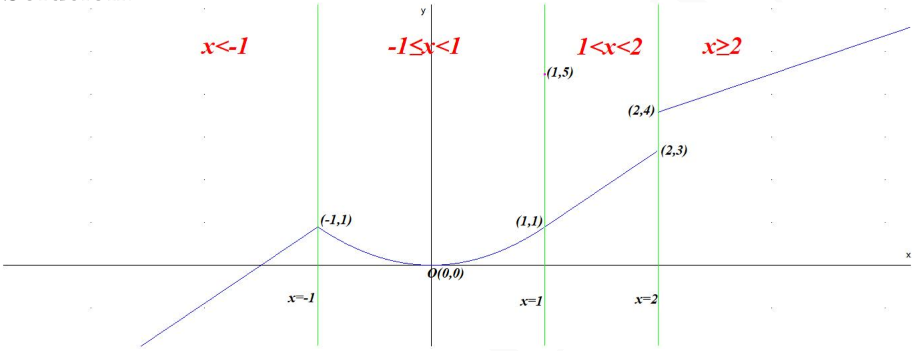
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Marzo 2024

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x+2 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 + x + 2a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 2bx + 1) = a - 2b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 + x + 2a) = b + 1 + 2a$$

$$a - 2b + 1 = b + 1 + 2a \Longrightarrow a + 3b = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a - 2b; \;\; f'(1^+) = 2b + 1 \Longrightarrow 2a - 2b = 2b + 1 \Longrightarrow 2a - 4b = 1$$

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2a - 4b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3/10 \\ b = -1/10 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ x + 2b & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{ax-b}{3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x-a}{2} = \dfrac{-1-a}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x+2b) = -1 + 2b \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-1-a}{2} = -1 + 2b \Longrightarrow a + 4b = 1$$

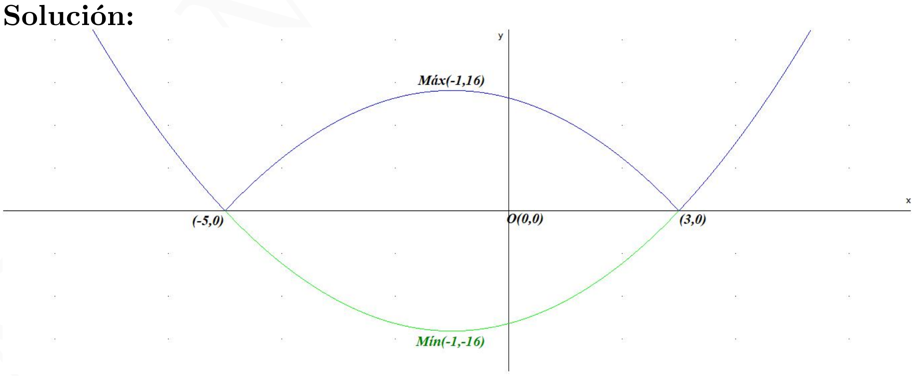
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x+2b) = 1 + 2b \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax-b}{3} = \dfrac{a-b}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + 2b = \frac{a-b}{3} \Longrightarrow a - 7b = 3$$

$$\begin{cases} a + 4b = 1 \\ a - 7b = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 19/11 \\ b = -2/11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 2x - 15|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + 2x - 15 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$:

x	y
0	-15
-5	0
3	0
-1	-16

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(-1) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(-1, -16)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(-1, 16)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + 2x - 15 & \text{si} & x \le -5 \\ -(x^2 + 2x - 15) & \text{si} & -5 < x \le 3 \\ x^2 + 2x - 15 & \text{si} & 3 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^-} (x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^+} (-x^2 - 2x + 15) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

y f es continua en $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (-x^2 - 2x + 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 2 & \text{si} & x \le -5 \\ -2x - 2 & \text{si} & -5 < x \le 3 \\ 2x + 2 & \text{si} & 3 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -5$: $f'(-5^-) = -8$ y $f'(-5^+) = 8$, luego no es derivable en $x = -5$.
Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -8$ y $f'(3^+) = 8$, luego no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-5, 3\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx - c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 4)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx - c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=1 \Longrightarrow c=-1 \\ f(3)=4 \Longrightarrow -18a+3b-c+27=4 \\ f'(3)=0 \Longrightarrow -12a+b+27=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=19/6 \\ b=11 \\ c=-1 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x)=x^3-\dfrac{19}{3}x^2+11x+1$

$f'(x)=3x^2-\dfrac{38}{3}x+11$ y $f''(x)=6x-\dfrac{38}{3} \Longrightarrow f''(3)=18-38=-20<0 \Longrightarrow x=3$ es un máximo relativo.