Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Febrero 2024

Problema 1 Dada la función
$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1}$$
Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

b) Puntos de Corte

- ☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 27 = 0 \Longrightarrow (3, 0), (-3, 0)$.
- ☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = \dfrac{-27}{-1} \Longrightarrow (0, 27)$.

c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ la función es PAR.

e) Asíntotas:

☛ **Verticales:**
$x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^+}\right] = -\infty$$

$x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \left[\frac{-24}{0^-}\right] = +\infty$$

☛ **Horizontales:** $y = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 - 1} = 3$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \dfrac{48x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\nearrow$	creciente $\searrow$

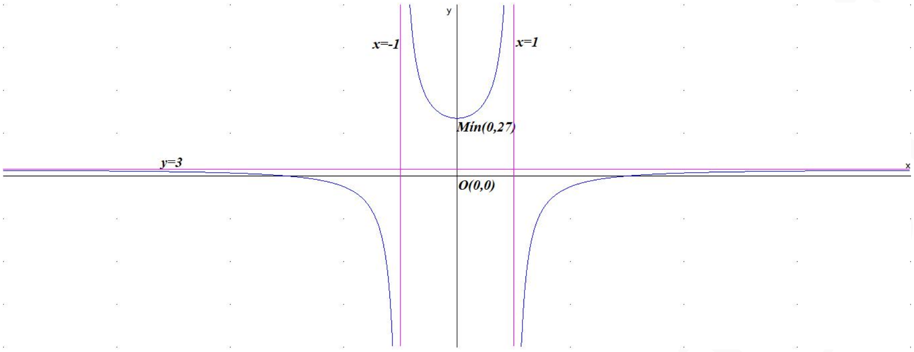
La función es creciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.
La función tiene un mínimo en el punto $(0, 27)$.

g) $f''(x) = -\dfrac{48(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 1 = 0$ No tiene solución y, por tanto, no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

Convexa : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Cóncava: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

Como $m = f'(2) = 32/3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y + 5 = \frac{32}{3}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y + 5 = -\frac{3}{32}(x - 2)$$

Como $f(2) = -5$ las rectas pasan por el punto $(2, -5)$.