Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Abril 2024

Problema 1 (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $x - 3y + 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,1) \\ A(-1,0) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x,y) = (-1,0) + \lambda(3,1)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{1}$
- General: $x - 3y + 1 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$
- Punto pendiente: $y = \dfrac{1}{3}(x+1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 18^\circ 26' 6''$

Problema 2 (3 puntos) Sea el punto $A(0,2)$ y la recta $r: x - y + 3 = 0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a r que pase por el punto A.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.

c) (1 punto) El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

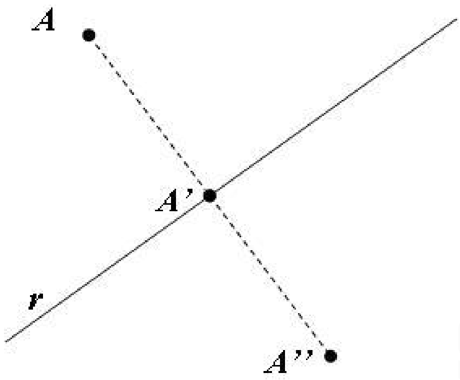
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de r con $s: x + y + 1 = 0$.

Solución:

a) $x - y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 0 - 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$. La recta buscada es $h: x - y + 2 = 0$

b) $x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 0 + 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$. La recta buscada es $t: x + y - 2 = 0$

c) Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta t perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y t:

$$\begin{cases} r: x - y + 3 = 0 \\ t: x + y - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) - (0, 2) = (-1, 3)$$

d)

$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 1|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |x - y + 3| = |x + y + 1|$$

- $x - y + 3 = x + y + 1 \Longrightarrow y - 1 = 0$
- $x - y + 3 = -x - y - 1 \Longrightarrow x + 2 = 0$

Problema 3 (3 puntos) Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(3, 0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

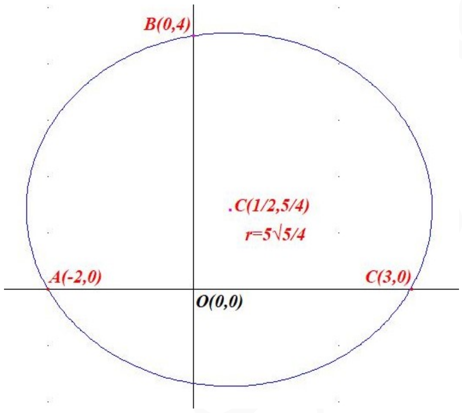
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\begin{cases} -2m + p = -4 \\ 4n + p = -16 \\ 3m + p = -9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -5/2 \\ p = -6 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - x - \frac{5}{2}y - 6 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = -1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2} \\ n = -2b = -5/2 \Longrightarrow b = \dfrac{5}{4} \\ p = -6 = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \dfrac{5\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \quad r = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$



Problema 4 (2 puntos) Encontrar los puntos de la recta

$$r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(1,1)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r: \left\{\begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{array}\right.$
y sustituimos en la circunferencia:

$$(-1-\lambda-1)^2 + (2+\lambda-1)^2 = 49 \Longrightarrow 2\lambda^2 + 6\lambda - 44 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3,4244, \quad \lambda_2 = -6,4244$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 3,4244 \Longrightarrow P_1(-4,4244; 5,4244) \\ \lambda_2 = -6,4244 \Longrightarrow P_2(5,4244; -4,4244) \end{array}\right.$$