Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Marzo 2024

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,0)$, $B(0,6)$ y $C(5,0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

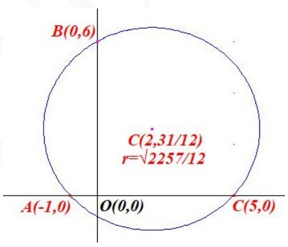
$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\begin{cases} -m+p=-1 \\ 6n+p=-36 \\ 5m+p=-25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m=-4 \\ n=-31/6 \\ p=-5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-4x-\frac{31}{6}y-5=0$$

$$\begin{cases} m=-2a=-4 \Longrightarrow a=2 \\ n=-2b=-\dfrac{31}{6} \Longrightarrow b=\dfrac{31}{12} \\ p=-5=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\dfrac{\sqrt{2257}}{12} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(2,\frac{31}{12}\right),\quad r=\frac{\sqrt{2257}}{12}$$



Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

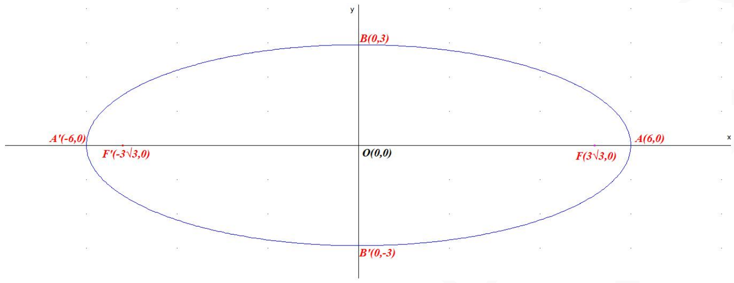
Solución:

$$a^2=36 \Longrightarrow a=6,\quad b^2=9 \Longrightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=3\sqrt{3}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

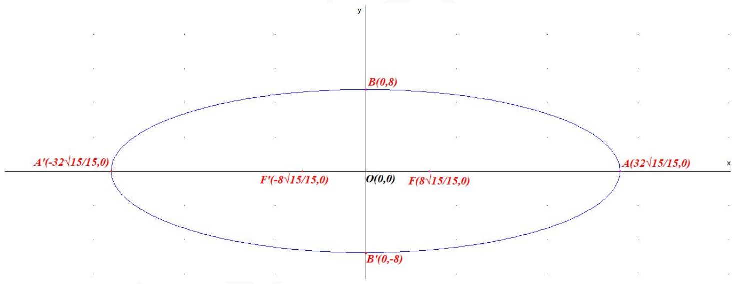
Eje Mayor$=2a=12$
Eje Menor$=2b=6$
Distancia Focal$=2c=6\sqrt{3}$

Excentricidad= $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Vértices: $A(6,0)$, $A'(-6,0)$, $B(0,3)$, $B(0,-3)$
Focos: $F\left(3\sqrt{3},0\right)$, $F'\left(-3\sqrt{3},0\right)$
Ecuación general: $x^2 + 4y^2 = 36$



Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 8 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:



$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = 4c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 16c^2 = 64 + c^2 \Longrightarrow c = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

$$a = 4c = \frac{32\sqrt{15}}{15}$$

Eje Mayor= $2a = \dfrac{64\sqrt{15}}{15}$
Eje Menor= $2b = 16$
Distancia Focal= $2c = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$
Excentricidad= $e = \dfrac{1}{4}$
Vértices: $A\left(\dfrac{32\sqrt{15}}{15},0\right)$, $A'\left(-\dfrac{32\sqrt{15}}{15},0\right)$, $B(0,8)$, $B'(0,-8)$

Focos: $F\left(\frac{8\sqrt{15}}{15},0\right)$, $F'\left(-\frac{8\sqrt{15}}{15},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{1024/15}+\frac{y^2}{64}=1$$

Ecuación general: $15x^2+16y^2=1024$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(1,1)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=25$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r: \left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=2\lambda \end{array}\right.$
y sustituimos en la circunferencia:

$$(2+\lambda-1)^2+(2\lambda-1)^2=25 \Longrightarrow 5\lambda^2-2\lambda-23=0 \Longrightarrow \lambda_1=-1,9541,\quad \lambda_2=2,3541$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=-1,9541 \Longrightarrow P_1(0,0459,8;-3,9081) \\ \lambda_2=2,3541 \Longrightarrow P_2(4,3541,4,7081) \end{array}\right.$$

Problema 5 Se quiere construir un circuito de carreras para automóviles alrededor de una finca. Cualquier punto de este trazado está relacionado con dos talleres en los puntos $(5,0)$ y $(0,5)$. La suma de las distancias desde cualquier punto del circuito a estos dos talleres tiene que ser constante e igual a 12 u, de esa manera se cubre cualquier incidente en una carrera de forma óptima. Con estos datos se pide:

a) Identifica la curva descrita por el circuito.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Hay que hacer puntos de drenaje para lluvias cuando $x=3$, calcular los puntos de drenaje y las tangentes a la curva en esos puntos.

d) En caso de accidente importante, en alguno de sus puntos, se produciría la destrucción de lo construido en un círculo de 2 u. Queremos poner un valioso objeto en el punto $(3,3)$, ¿sería aconsejable?
$u=100$ metros.

Solución:

a) Se trata de una elipse por definición.

b) Sea $P(x,y)$ un punto de esa elipse, sean $F(5,0)$ y $F'(0,5)$ sus focos, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{FP}|+|\overrightarrow{F'P}|=12 \Longrightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}=12$$

$$(x-5)^2+y^2=(12-\sqrt{x^2+(y-5)^2})^2 \Longrightarrow$$

$$-10x+10y-144=-24\sqrt{(x^2+(y-5)^2} \Longrightarrow$$

$$119x^2+119y^2+50xy-720x-720y-1584=0$$

c) Si $x=3 \Longrightarrow 119y^2-570y-2673=0 \Longrightarrow y_1=-2,915221732$ e $y_2=7,705137699$. Los puntos en los que tenemos que calcular las tangentes son $H(3;7,705137699)$ y $Q(3;-2,915221732)$. Calculamos la derivada de la función:

$$238xdx+238ydy+50ydx+50xdy-720dx-720dy=0 \Longrightarrow$$

$$(238x+50y-720)dx+(238y+50x-720)dy=0 \Longrightarrow$$

$$(238y+50x-720)dy=-(238x+50y-720)dx \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{238x+50y-720}{238y+50x-720}$$

La pendiente m_1 de la recta pendiente en $Q(3;-2,915221732)$ es:

$$m_1=-0,1200809875$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y+2,915221732=-0,1200809875(x-3)$$

La pendiente m_2 de la recta pendiente en $H(3;7,705137699)$ es:

$$m_2=-0,3000870796$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y-7,705137699=-0,3000870796(x-3)$$

d) El objeto no corre peligro por esta circunstancia.