# Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
**Febrero 2024**

**Problema 1** (2 puntos) Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $7x - 2y - 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 7) \\ A(1, 3) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (1, 3) + \lambda(2, 7)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 7\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{7}$
- General: $7x - 2y - 1 = 0$
- Explícita: $y = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{1}{7}$
- Punto pendiente: $y - 3 = \dfrac{2}{7}(x - 1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = \dfrac{2}{7} \Longrightarrow \alpha = 15^\circ 56' 43''$

**Problema 2** (5 puntos) Si los puntos $A(-2, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(1, 5)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular

a) (1,5 puntos) el circuncentro.

b) (2 puntos) sus ángulos y decidir que tipo de triángulo es.

c) (1,5 puntos) calcular la longitud de la altura sobre el lado $AB$ y la ecuación de la recta que la define.

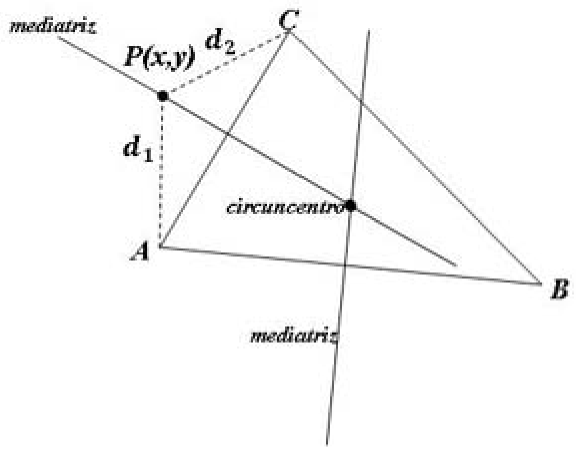
**Solución:**

a)
- Mediatriz entre $A$ y $B$:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} \Longrightarrow 4x + y = 7$$

- Mediatriz entre $A$ y $C$:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} \Longrightarrow 3x + 7y = 9$$




- Circuncentro:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + y = 7 \\ 3x + 7y = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(8,2)| = 2\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(3,7)| = \sqrt{58}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{24+14}{2\sqrt{17}\cdot\sqrt{58}} \Longrightarrow \hat{A} = 52^\circ 45' 55''$$

$|\overrightarrow{BA}| = |(-8,-2)| = 2\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{BC}| = |(-5,5)| = 5\sqrt{2}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{40-10}{2\sqrt{17}\cdot 5\sqrt{2}} \Longrightarrow \hat{B} = 59^\circ 2' 10''$$

$|\overrightarrow{CA}| = |(-3,-7)| = \sqrt{58}$, $|\overrightarrow{CB}| = |(5,-5)| = 5\sqrt{2}$:

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-15+35}{\sqrt{58}\cdot 5\sqrt{2}} \Longrightarrow \hat{C} = 68^\circ 11' 55''$$

Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (8,2) \perp \overrightarrow{u} = (2,-8)$:
La recta que une $A$ y $B$: $2x - 8y + \lambda = 0$ como tiene que pasar por $B(6,0) \Longrightarrow 12 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow t : 2x - 8y - 12 = 0$

$$\text{Altura} = d(C,t) = \frac{|2-40-12|}{\sqrt{4+64}} = \frac{25\sqrt{17}}{17}\ u$$

La recta que define esta altura tiene de ecuación $h_1 : 8x + 2y + \lambda = 0$ y, como pasa por $C(1,5)$, tenemos $8 + 10 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -18 \Longrightarrow h_1 : 8x + 2y - 18 = 0 \Longrightarrow h_1 : 4x + y - 9 = 0$

**Problema 3** (3 puntos) Sea el punto $A(1,3)$ y la recta $r: x+2y+4=0$. Se pide calcular:

a) (0,5 puntos) Una recta paralela a $r$ que pase por el punto $A$.

b) (0,5 puntos) Una recta perpendicular a $r$ que pase por el punto $A$.

c) (1 punto) El punto $A''$ simétrico de $A$ respecto de la recta $r$.

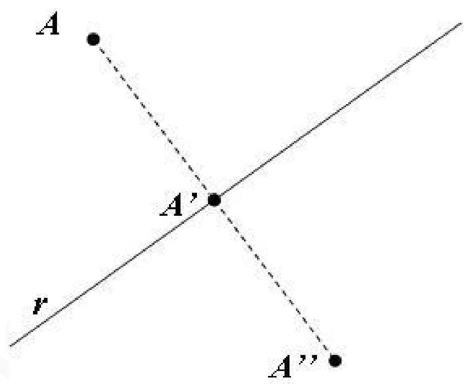
d) (1 punto) Las rectas bisectrices de $r$ con $s: 2x-y+5=0$.

**Solución:**

a) $x+2y+\lambda=0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 1+6+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-7$. La recta buscada es $h: x+2y-7=0$

b) $2x-y+\lambda=0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 2-3+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=1$. La recta buscada es $t: 2x-y+1=0$

c) Calculamos $A''$ simétrico de $A$ respecto de la recta $r$:




- Calculamos una recta $t$ perpendicular a $r$ y que pase por $A$, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre $r$ y $t$:

$$\begin{cases} r: x+2y+4=0 \\ t: 2x-y+1=0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(-\frac{6}{5},-\frac{7}{5}\right)$$

- El punto $A'$ calculado es el punto medio entre el punto $A$ y el punto $A''$ que tenemos que calcular:

$$\frac{A+A''}{2}=A' \Longrightarrow A''=2A'-A=2\left(-\frac{6}{5},-\frac{7}{5}\right)-(1,3)=\left(-\frac{17}{5},-\frac{29}{5}\right)$$

d)

$$d(P,r) = d(P,s) \Longrightarrow \frac{|x+2y+4|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y+5|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow |x+2y+4| = |2x-y+5|$$

- $x+2y+4 = 2x-y+5 \Longrightarrow x-3y+1=0$
- $x+2y+4 = -2x+y-5 \Longrightarrow 3x+y+9=0$