Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Enero 2024

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -8+3i$ y $z_2 = 5-2i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = -3 + i$ y $z_1 - z_2 = -13 + 5i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -34 + 31i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{46}{29} - \dfrac{1}{29}i$

Problema 2 Si $z = -5+2i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = -5+2i = \sqrt{29}_{158^\circ 11'55''} = \sqrt{29}(\cos 158^\circ 11'55'' + i\sin 158^\circ 11'55'')$$

$$z^{10} = (-5+2i)^{10} = 29^5_{10\cdot 158^\circ 11'55''} = 29^5_{1581^\circ 59'9''} = 29^5_{141^\circ 59'9''} =$$
$$29^5(\cos 141^\circ 59'9'' + i\sin 141^\circ 59'9'') = (-16159899 + 12631900i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-7+i}$

Solución:

$$z = -7+i = \sqrt{50}_{171^\circ 52'12''} = \sqrt{50}(\cos 171^\circ 52'12'' + i\sin 171^\circ 52'12'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[6]{50}_{57^\circ 17'24''} = \sqrt[6]{50}(\cos 57^\circ 17'24'' + i\sin 57^\circ 17'24'') \\ \sqrt[6]{50}_{177^\circ 17'24''} = \sqrt[6]{50}(\cos 177^\circ 17'24'' + i\sin 177^\circ 17'24'') \\ \sqrt[6]{50}_{297^\circ 17'24''} = \sqrt[6]{50}(\cos 297^\circ 17'24'' + i\sin 297^\circ 17'24'') \end{cases}$$

Problema 4 Sean $A(-1,-5)$, $B(5,1)$ y $C(1,7)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

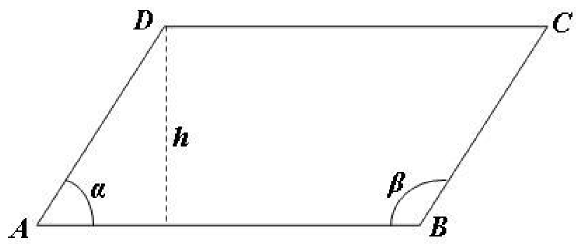
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, -5) + (-4, 6) = (-5, 1)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(6, 6)| = 6\sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(-4, 6)| = 2\sqrt{13}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{-24 + 36}{6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{13}} \Longrightarrow \alpha = 78^\circ 41' 24''$ y $\beta = 101^\circ 18' 36''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\,(0, 1)$

f)

$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = 7,0711\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h = 60\ u^2$

h) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (3, 19)$

i) $\overrightarrow{AC} = (2, 12) \perp \overrightarrow{u} = (12, -2) = 2(6, -1)$ y $\overrightarrow{w} = \dfrac{7}{\sqrt{37}}(6, -1) = \left(\dfrac{42\sqrt{37}}{37}, -\dfrac{7\sqrt{37}}{37}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{3}, 4\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-1, -5) + \left(\frac{2}{3}, 4\right) = \left(-\frac{1}{3}, -1\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(-\frac{1}{3}, -1\right) + \left(\frac{2}{3}, 4\right) = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{3}, 3\right) + \left(\frac{2}{3}, 4\right) = (1, 7)$$