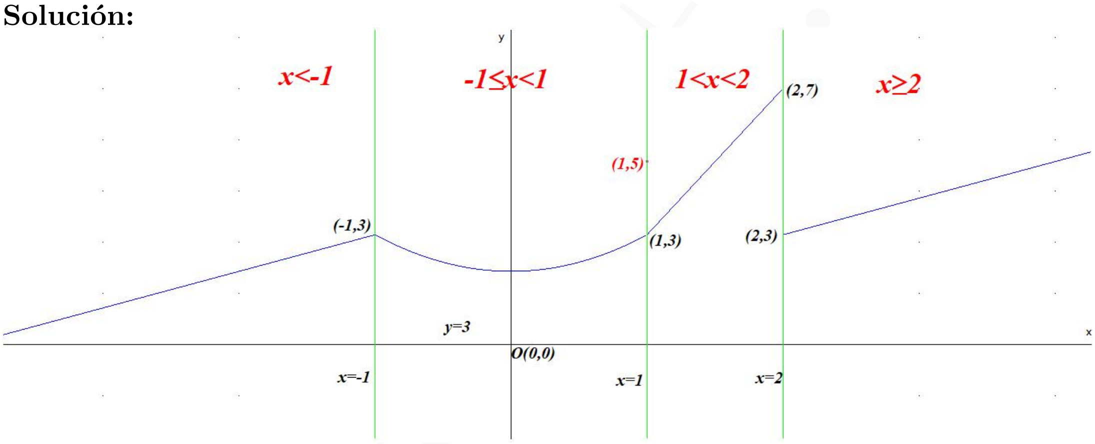
# Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)
**Mayo 2024**

**Problema 1** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ 4x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
**Solución:**




En $x = -1$ es discontinua no evitable(salto) , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

**Problema 2** Calcular $a$ y $b$ para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - x + 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 + x - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

**Solución:**

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - x + 2b) = 3a - 1 + 2b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 + x - a) = b + 1 - a$$

$$3a-1+2b=b+1-a \Longrightarrow 4a+b=2$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} 6ax-1 & \text{si} & x<1 \\ 2bx+1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

$$f'(1^-)=6a-1;\ \ f'(1^+)=2b+1 \Longrightarrow 6a-1=2b+1 \Longrightarrow 3a-b=1$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4a+b=2 \\ 3a-b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{7} \\ b=\dfrac{2}{7} \end{array}\right.$$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{9}{7}x^2-x+\dfrac{4}{7} & \text{si} & x<1 \\ \dfrac{2}{7}x^2+x-\dfrac{3}{7} & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{18}{7}x-1 & \text{si} & x<1 \\ \dfrac{4}{7}x+1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c\in[0,2]/f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{19/7-4/7}{2}=\frac{15}{14}$$

Si $c<1:\ \ f'(c)=\dfrac{18}{7}c-1=\dfrac{15}{14} \Longrightarrow c=\dfrac{29}{36}$ solución válida.

Si $c\ge 1:\ \ f'(c)=\dfrac{4}{7}c+1=\dfrac{15}{14} \Longrightarrow c=\dfrac{1}{8}$ solución no válida.

**Problema 3** Calcular $a$ y $b$ para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lcc} \dfrac{x+2a}{2} & \text{si} & x<-1 \\ bx+2 & \text{si} & -1\le x<1 \\ \dfrac{ax-b}{3} & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

**Solución:**

Continuidad en $x=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}\dfrac{x+2a}{2}=\dfrac{-1+2a}{2} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(bx+2)=-b+2 \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-1+2a}{2}=-b+2 \Longrightarrow 2a+2b=5$$

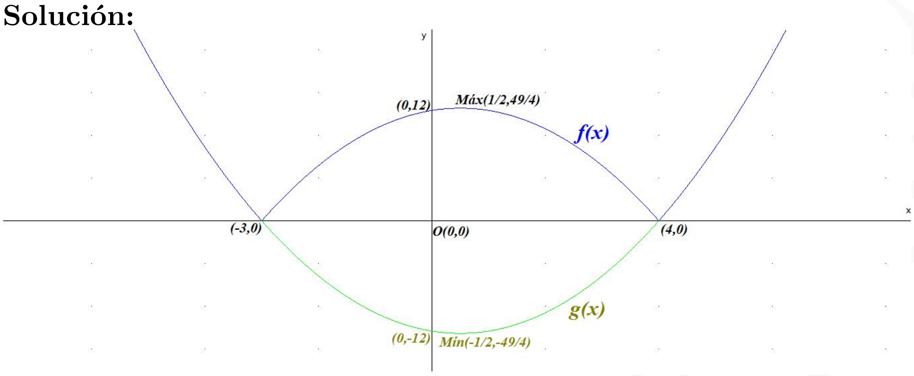
Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(bx+2)=b+2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{ax-b}{3}=\dfrac{a-b}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a-b}{3}=b+2 \Longrightarrow a-4b=6$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+2b=5 \\ a-4b=6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=16/5 \\ b=-7/10 \end{array}\right.$$

**Problema 4** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - x - 12|$ y representarla gráficamente.

**Solución:**




Hacemos $g(x) = x^2 - x - 12 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2$ :

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $-12$ |
| $-3$ | $0$ |
| $4$ | $0$ |
| $1/2$ | $-49/4$ |

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{49}{4}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - x - 12 & \text{si} & x \le -3 \\ -(x^2 - x - 12) & \text{si} & -3 < x \le 4 \\ x^2 - x - 12 & \text{si} & 4 \le x \end{array} \right.$$

$f$ es continua en $x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^-} (x^2 - x - 12) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^+} (-x^2 - x - 12) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

y $f$ es continua en $x = 4$:

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} (-x^2 - x - 12) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} (x^2 - x - 12) = 0$$

$$f(4) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \le -3 \\ -2x+1 & \text{si} \quad -3 < x \le 4 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 4 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -7$ y $f'(-3^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -3$.

Derivabilidad en $x = 4$: $f'(4^-) = -7$ y $f'(4^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 4$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$.

**Problema 5** Dada la función $f(x) = x^3 + 3ax^2 - bx + 2c$, encontrar los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 3)$. Decidir de que extremo se trata.

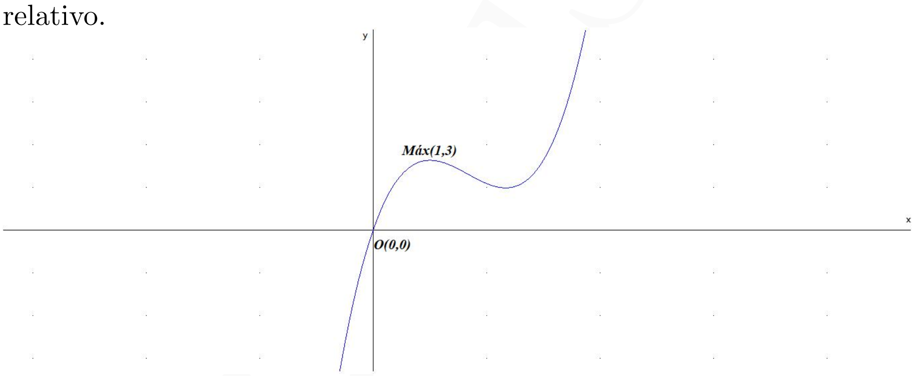
**Solución:**

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - bx + 2c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 6ax - b$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Longrightarrow 2c = 0 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow 3a - b + 2c + 1 = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 6a - b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -5/3 \\ b = -7 \\ c = 0 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$ y $f''(x) = 6x - 10 \Longrightarrow f''(1) = -4 < 0 \Longrightarrow x = 1$ es un máximo relativo.




**Problema 6** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3e^x - 2x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{5x}{x+2} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Calcular $a$ de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de $a$ obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

**Solución:**

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(3e^x - 2x + a) = 3 + a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{5x}{x+2} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 3 + a = 0 \Longrightarrow a = -3$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es continua, luego $f$ es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = -3$.

b) Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3e^x - 2 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{10}{(x+2)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión $f$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.