

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)

Mayo 2024

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Puntos de Corte

• Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 7x = 0 \implies (0, 0)$.

• Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	-	+

d) $f(-x) = -f(x) \implies$ la función es IMPAR.

e) Asíntotas:

• **Verticales:** No tiene, el denominador no se anula nunca.

☛ **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{x^2 + 1} = 0$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = -\frac{7(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, -\frac{7}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{7}{2})$.

g)

$$f''(x) = \frac{14x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

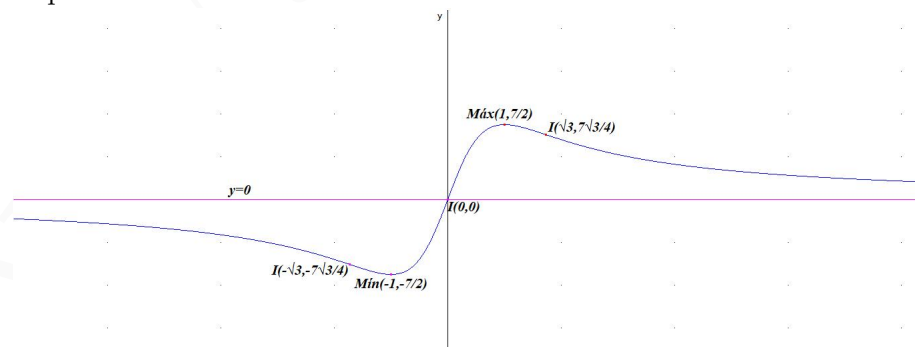
Luego la función si tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y Cóncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Puntos de Inflexión: $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, -\frac{7\sqrt{3}}{4})$ y $(\sqrt{3}, \frac{7\sqrt{3}}{4})$.

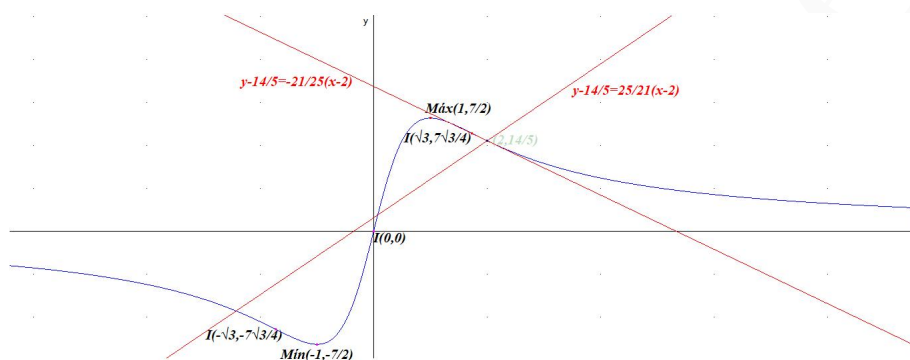
h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:
Como $m = f'(2) = -21/25$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{14}{5} = -\frac{21}{25}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{14}{5} = \frac{25}{21}(x - 2)$$



Como $f(2) = 14/5$ las rectas pasan por el punto $\left(2, \frac{14}{5}\right)$.