

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2023

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{-7x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.
- (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies -7x = 0 \implies (0, 0)$ con OX .
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

$f(-x) = -f(x) \implies$ la función es impar.

b) $f'(x) = \frac{7(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

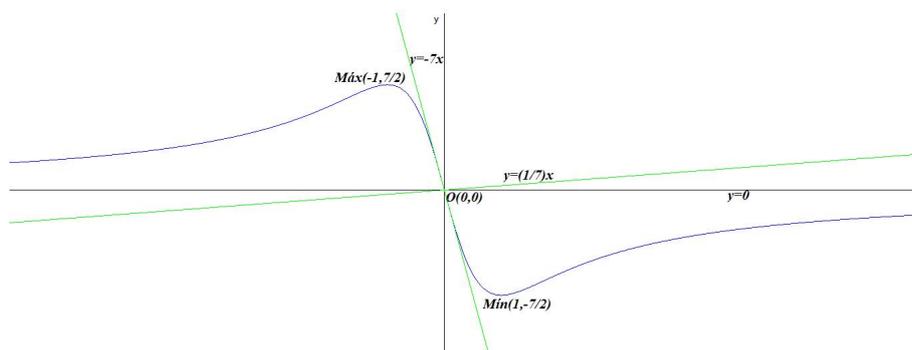
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decreciente en el intervalo $(-1, 1)$ con un máximo relativo en $(-1, \frac{7}{2})$ y un mínimo relativo en $(1, -\frac{7}{2})$

- c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:
Como $m = f'(0) = -7$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y = -7x$$

$$\text{Recta Normal : } y = \frac{1}{7}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.



Problema 2 (2 puntos) Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3ax - b}{2} & \text{si } x < -1 \\ x - a & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x - b}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3ax - b}{2} = \frac{-3a - b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - a) = -1 - a \end{cases} \implies \frac{-3a - b}{2} = -1 - a \implies a + b = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - a) = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - b}{2} = \frac{1 - b}{2} \end{cases} \implies \frac{1 - b}{2} = 1 - a \implies 2a - b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Problema 3 (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x - 14|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 5x - 14 \implies g'(x) = 2x - 5 = 0 \implies x = 5/2$:

x	y
0	-14
-2	0
7	0
5/2	-81/4

$g''(x) = 2 \implies g''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{5}{2}, \frac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 14 & \text{si } x \leq -2 \\ -(x^2 - 5x - 14) & \text{si } -2 < x \leq 7 \\ x^2 - 5x - 14 & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

f es continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 5x - 14) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2 + 5x + 14) = 0 \\ f(-2) &= 0 \end{aligned}$$

Y f es continua en $x = 7$

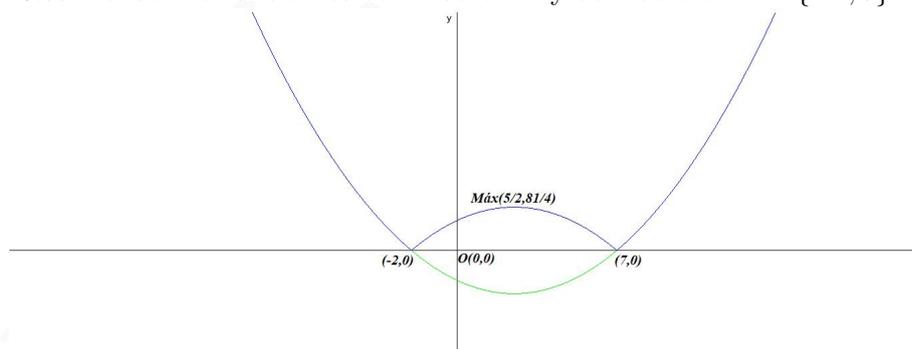
$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} (-x^2 + 5x + 14) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7^+} (x^2 - 5x - 14) = 0 \\ f(7) &= 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq -2 \\ -2x + 5 & \text{si } -2 < x \leq 7 \\ 2x - 5 & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -2$: $f'(-2^-) = -9$ y $f'(-2^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -2$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -9$ y $f'(7^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 7\}$.



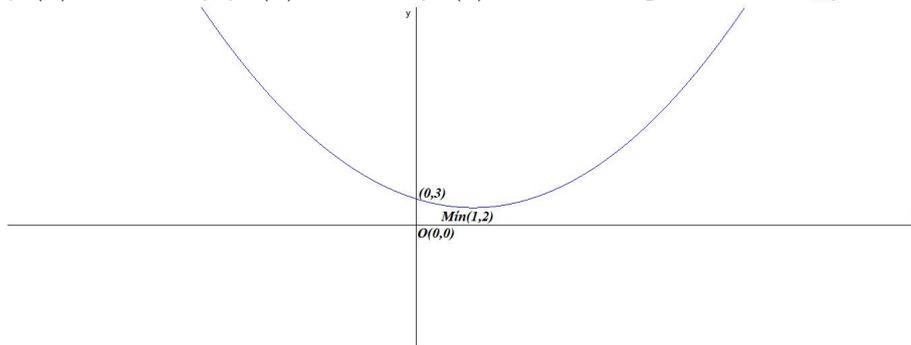
Problema 4 (1 punto) Dada la función $f(x) = 2ax^2 + bx - c$, encontrar los valores de a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 2)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = 2ax^2 + bx - c \implies f'(x) = 4ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \implies -c = 3 \\ f(1) = 2 \implies 2a + b - c = 2 \\ f'(1) = 0 \implies 4a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^2 - 2x + 3$
 $f'(x) = 2x - 2$ y $f''(x) = 2 \implies f''(1) = 2 > 0$ luego en $x = 1$ hay un mínimo.



Problema 5 (2 puntos) calcular dos números reales positivo que cumplan: uno de ellos sumado al otro elevado al cuadrado es 300 y el producto de ellos sea máximo.

Solución:

$$y + x^2 = 300 \implies y = 300 - x^2$$

$$P(x, y) = xy \implies P(x) = x(-x^2 + 300) = -x^3 + 300x$$

$$P'(x) = -3x^2 + 300 = 0 \implies x = 10, \text{ la solución negativa es irrelevante.}$$

$$P''(x) = -6x \implies P''(10) = -60 < 0 \implies x = 10 \text{ es un máximo relativo.}$$

Los números pedidos son $x = 10$ e $y = 300 - 100 = 200$.

El producto máximo sería $P(10) = -6^3 + 108 \cdot 6 = 2000$