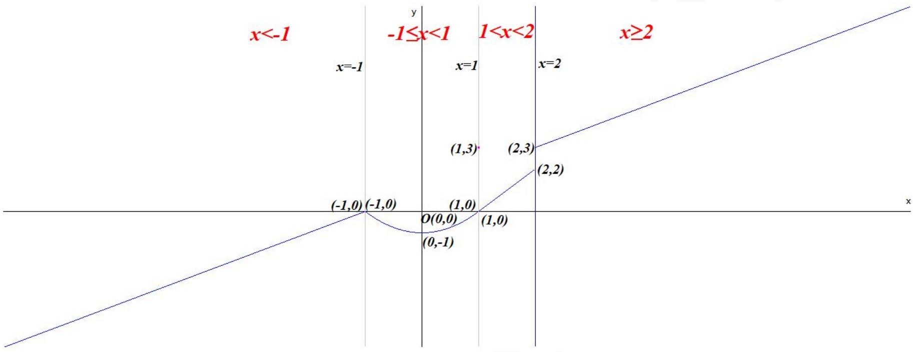
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Marzo 2023

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - x + a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - x + a) = b - 1 + a$$

$$2a - b + 1 = b - 1 + a \Longrightarrow a - 2b = -2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b;\;\; f'(1^+) = 2b - 1 \Longrightarrow 4a - b = 2b - 1 \Longrightarrow 4a - 3b = -1$$

$$\begin{cases} a - 2b = -2 \\ 4a - 3b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4/5 \\ b = 7/5 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a}{3} & \text{si} \quad x < -1 \\ x - 2b & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{ax - b}{3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x - a}{3} = \dfrac{-1 - a}{3} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x - 2b) = -1 - 2b \end{cases} \Longrightarrow \frac{-1 - a}{3} = -1 - 2b \Longrightarrow a - 6b = 2$$

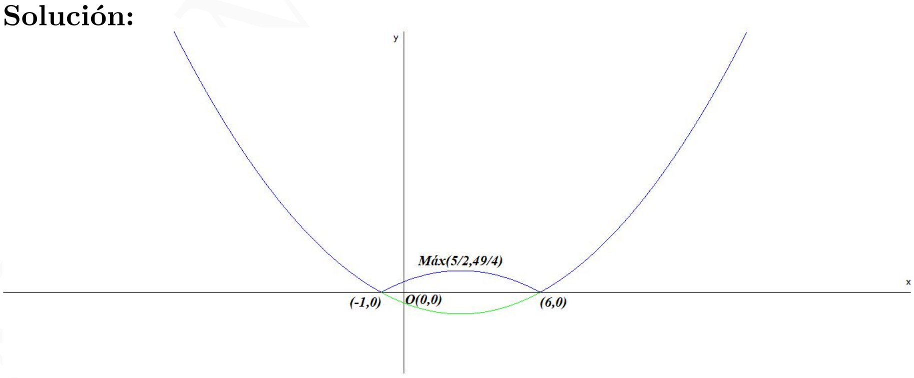
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x - 2b) = 1 - 2b \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax - b}{3} = \dfrac{a - b}{3} \end{cases} \Longrightarrow 1 - 2b = \frac{a - b}{3} \Longrightarrow a + 5b = 3$$

$$\begin{cases} a - 6b = 2 \\ a + 5b = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 28/11 \\ b = 1/11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 - 5x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$:

x	y
0	-6
-1	0
6	0
$5/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\dfrac{5}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 5x - 6 & \text{si} & x \le -1 \\ -(x^2 - 5x - 6) & \text{si} & -1 < x \le 6 \\ x^2 - 5x - 6 & \text{si} & 6 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

y f es continua en $x = 6$

$$\lim_{x \longrightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 6^-} (-x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 6^+} (x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$f(6) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 5 & \text{si} & x \le -1 \\ -2x + 5 & \text{si} & -1 < x \le 6 \\ 2x - 5 & \text{si} & 6 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -1$: $f'(-1^-) = -7$ y $f'(-1^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -1$.
Derivabilidad en $x = 6$: $f'(6^-) = -7$ y $f'(6^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 6$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 - 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 3)$.

Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(3) = 3 \Longrightarrow 9a - 6b + c + 27 = 3 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 6a - 2b + 27 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -55/9 \\ b = -29/6 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \dfrac{55}{9}x^2 + \dfrac{29}{3}x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{110}{9}x + \dfrac{29}{3}$ y $f''(x) = 6x - \dfrac{110}{9} \Longrightarrow f''(3) = 18 - \dfrac{110}{9} = \dfrac{52}{9} > 0 \Longrightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.