Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)
Febrero 2023

Problema 1 Dada la función
$$f(x) = \frac{3x}{x^2+5}$$
Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Puntos de Corte

- ☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 3x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
- ☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ la función es IMPAR.

e) Asíntotas:

- ☛ **Verticales:** No tiene, el denominador no se anula nunca.

- ☛ **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x}{x^2+5} = 0; \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{3x}{x^2+5} = 0$$

- ☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = -\dfrac{3(x^2-5)}{(x^2+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$	$(\sqrt{5}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$, tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-\sqrt{5}, -\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right) = (-2,236; -0,671)$ y un máximo relativo en $\left(\sqrt{5}, \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right) = (2,236; 0,671)$.

g)

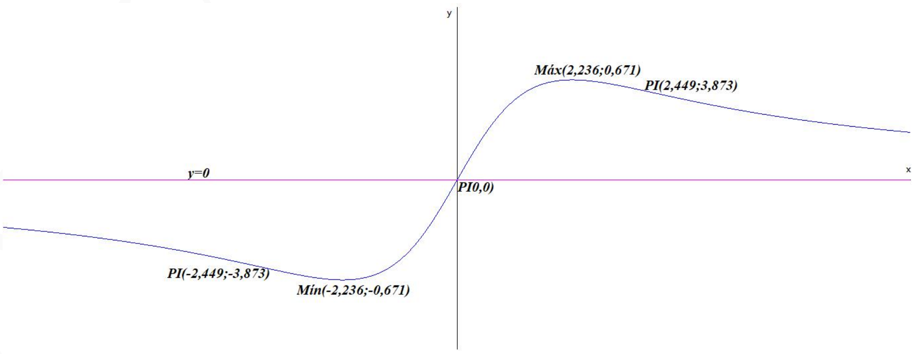
$$f''(x) = \frac{6x(x^2-15)}{(x^2+5)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm\sqrt{15}$$

Luego la función si tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -\sqrt{15})$	$(-\sqrt{15}, 0)$	$(0, \sqrt{15})$	$(\sqrt{15}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{15}) \cup (0, \sqrt{15})$ y Cóncava: $(-\sqrt{15}, 0) \cup (\sqrt{15}, \infty)$
Puntos de Inflexión: $(0, 0)$, $\left(\sqrt{15}, \dfrac{3\sqrt{15}}{20}\right) = (2,449; 3,873)$ y $\left(-\sqrt{15}, -\dfrac{3\sqrt{15}}{20}\right) = (-2,449; -3,873)$.

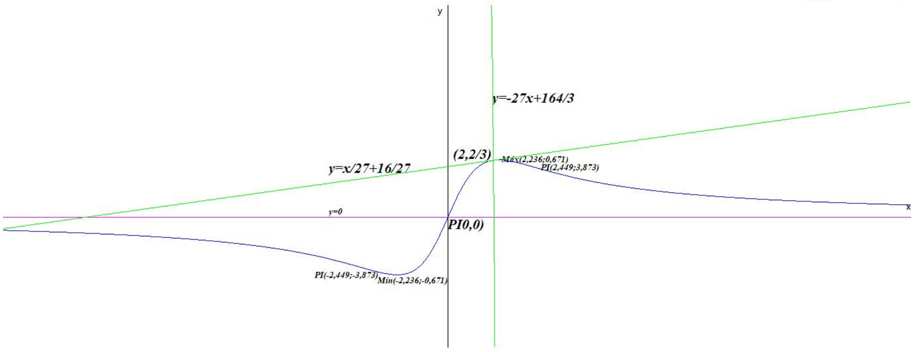
h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$: Como $m = f'(2) = 1/27$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - \frac{2}{3} = \frac{1}{27}(x-2) \Longrightarrow y = \frac{1}{27}x + \frac{16}{27}$$

$$\text{Recta Normal}: \ y - \frac{2}{3} = -27(x-2) \Longrightarrow y = -27x + \frac{164}{3}$$



Como $f(2) = \dfrac{2}{3}$ las rectas pasan por el punto $\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$.