Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Enero 2023

Problema 1 Dados los números complejos $z_1 = -7 - 5i$ y $z_2 = 2 + 6i$. Se pide calcular:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = -5 + i$ y $z_1 - z_2 = -9 - 11i$

b) $z_1 \cdot z_2 = 16 + 52i$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{11}{10} + \dfrac{4}{5}i$

Problema 2 Si $z = -3 + 5i$ calcular z^{10}.

Solución:

$$z = -3 + 5i = \sqrt{34}_{120^\circ 57' 50''} = \sqrt{34}(\cos 120^\circ 57' 50'' + i \sin 120^\circ 57' 50'')$$

$$z^{10} = (-3 + 5i)^{10} = 34^5_{10 \cdot 120^\circ 57' 50''} = 34^5_{1209^\circ 38' 20''} = 34^5_{129^\circ 38' 20''} =$$
$$34^5(\cos 129^\circ 38' 20'' + i \sin 129^\circ 38' 20'') = (-28985384 + 34988930i)$$

Problema 3 Calcular las raices de $\sqrt[3]{-5 + 3i}$

Solución:

$$z = -5 + 3i = \sqrt{34}_{149^\circ 2' 11''} = \sqrt{34}(\cos 149^\circ 2' 11'' + i \sin 149^\circ 2' 11'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[6]{34}_{49^\circ 40' 44''} = \sqrt[6]{34}(\cos 49^\circ 40' 44'' + i \sin 49^\circ 40' 44'') \\ \sqrt[6]{34}_{169^\circ 40' 44''} = \sqrt[6]{34}(\cos 169^\circ 40' 44'' + i \sin 169^\circ 40' 44'') \\ \sqrt[6]{34}_{289^\circ 40' 44''} = \sqrt[6]{34}(\cos 289^\circ 40' 44'' + i \sin 289^\circ 40' 44'') \end{cases}$$

Problema 4 Sean $A(-4, -3)$, $B(6, 0)$ y $C(1, 7)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Decidir de que figura geométrica se trata.

e) Su centro.

f) La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

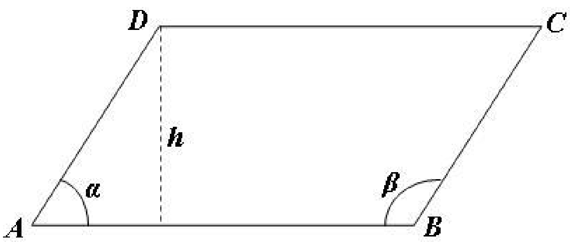
g) Su área.

h) El punto simétrico de A respecto de C

i) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ con módulo 7.

j) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-4, -3) + (-5, 7) = (-9, 4)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(10, 3)| = \sqrt{109}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(-5, 7)| = \sqrt{74}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{-50 + 21}{\sqrt{109} \cdot \sqrt{74}} \Longrightarrow \alpha = 108^\circ 50' 19''$ y $\beta = 71^\circ 9' 42''$

d) Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

e) $M\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

f)
$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = 8,1415\ u$$

g) $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h = 85\ u^2$

h) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (6, 17)$

i) $\overrightarrow{AC} = (5, 10) \perp \overrightarrow{u} = (10, -5) = 5(2, -1)$ y $\overrightarrow{w} = \dfrac{7}{5\sqrt{5}}(10, -5) = \left(\dfrac{14\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{7\sqrt{5}}{5}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 7.

j)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-4, -3) + \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = (1, 7)$$