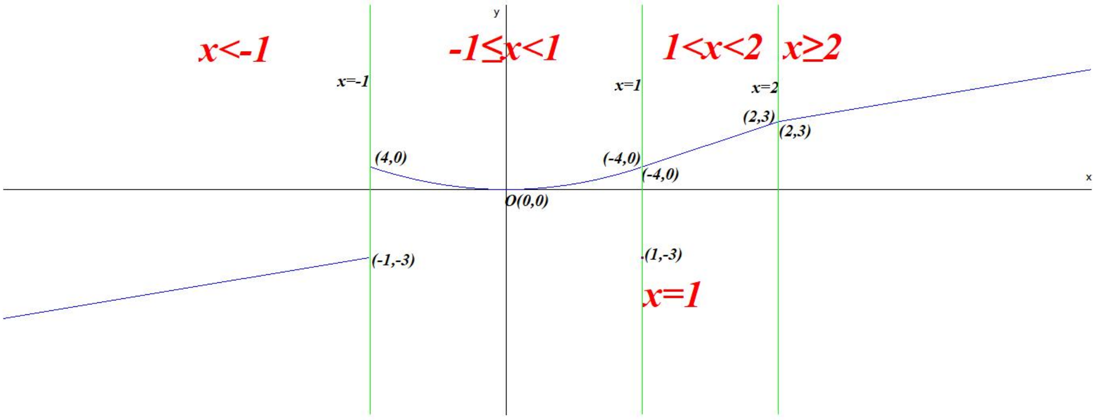
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)
Mayo 2023

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es discontinua no evitable(salto) , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - x + b & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 + 2x - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - x + b) = 2a - 1 + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 + 2x - a) = b + 2 - a$$

$$2a-1+b=b+2-a \Longrightarrow a=1$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\begin{cases} 4ax-1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2bx+2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-)=4a-1;\;\; f'(1^+)=2b+2 \Longrightarrow 4a-1=2b+2 \Longrightarrow 4a-2b=3$$

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a-2b=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{1}{2}x^2+2x-1 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} 4x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ x+2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c\in[0,2]/f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{5-1/2}{2}=\frac{9}{4}$$

Si $c<1$: $f'(c)=4c-1=\dfrac{9}{4} \Longrightarrow c=\dfrac{13}{16}$ solución válida.

Si $c\ge 1$: $f'(c)=c+2=\dfrac{9}{4} \Longrightarrow c=\dfrac{1}{4}$ solución no válida.

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+a}{2} & \text{si} & x<-1 \\ bx-1 & \text{si} & -1\le x<1 \\ \dfrac{ax+b}{3} & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x=-1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}\dfrac{2x+a}{2}=\dfrac{-2+a}{2} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(bx-1)=-b-1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-2+a}{2}=-b-1 \Longrightarrow a+2b=0$$

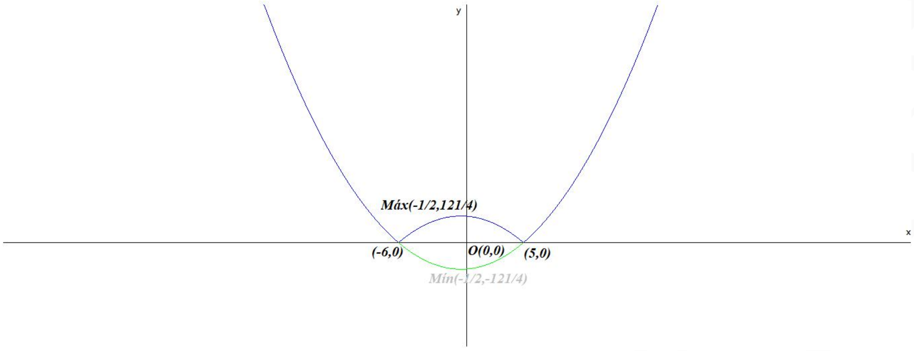
Continuidad en $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(bx-1)=b-1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{ax+b}{3}=\dfrac{a+b}{3} \end{cases} \Longrightarrow \frac{a+b}{3}=b-1 \Longrightarrow a-2b=-3$$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ a-2b=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-3/2 \\ b=3/4 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + x - 30|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + x - 30 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$:

x	y
0	-30
-6	0
5	0
$-1/2$	$-121/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{121}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{121}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 30 & \text{si} \quad x \le -6 \\ -(x^2 + x - 30) & \text{si} \quad -6 < x \le 5 \\ x^2 + x - 30 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

f es continua en $x = -6$

$$\lim_{x \longrightarrow -6^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -6^-} (x^2 + x - 30) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -6^+} (-x^2 - x + 30) = 0$$

$$f(-6) = 0$$

y f es continua en $x = 5$:

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 - x + 30) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (-x^2 - x + 30) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le -6 \\ -2x-1 & \text{si} \quad -6 < x \le 5 \\ 2x+1 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -6$: $f'(-6^-) = -11$ y $f'(-6^+) = 11$, luego no es derivable en $x = -6$.

Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -11$ y $f'(5^+) = 11$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-6, 5\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un extremo en el punto $(1,2)$. Decidir de que extremo se trata.

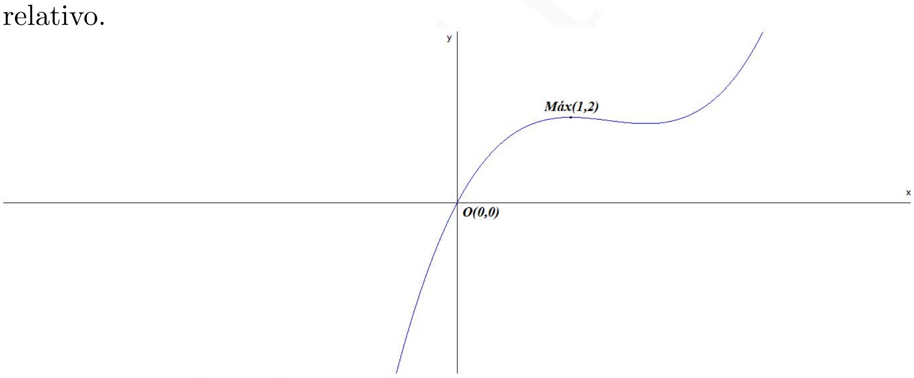
Solución:

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = 2 \Longrightarrow -2a + b + c + 1 = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow -4a + b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 0 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ y $f''(x) = 6x - 8 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 1$ es un máximo relativo.



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - x + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(2e^x - x + a) = 2 + a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x}{x+1} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 2 + a = 0 \Longrightarrow a = -2$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es continua, luego f es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = -2$.

b) Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2e^x - 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 0 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.