

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)

Abril 2022

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{-5x}{x^2 + 7}$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.
- (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Puntos de Corte

☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow -5x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ con OX .

☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$.

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar.

b) $f'(x) = \frac{5(x^2 - 7)}{(x^2 + 7)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

	$(-\infty, -\sqrt{7})$	$(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$	$(\sqrt{7}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

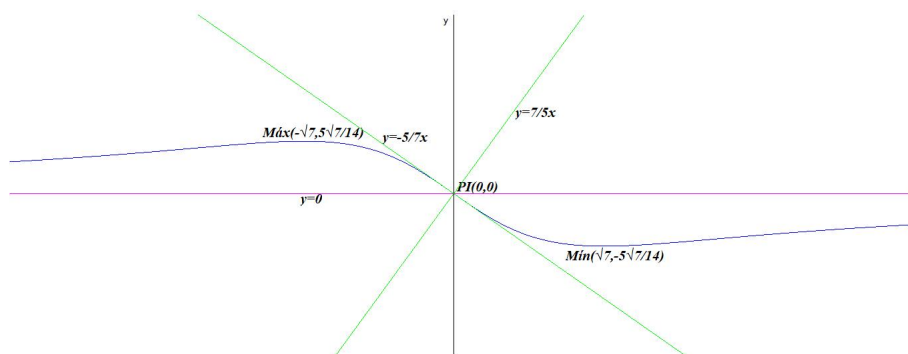
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$, decreciente en el intervalo $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ con un máximo relativo en $\left(-\sqrt{7}, \frac{5\sqrt{7}}{14}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\sqrt{7}, -\frac{5\sqrt{7}}{14}\right)$

- c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:
Como $m = f'(0) = -5/7$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y = -\frac{5}{7}x$$

$$\text{Recta Normal : } y = \frac{7}{5}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0, 0)$.



Problema 2 (2 puntos) Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2ax - b}{3} & \text{si } x < -1 \\ x + a & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x + b}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2ax - b}{3} = \frac{-2a - b}{3} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + a) = -1 + a \end{cases} \Rightarrow \frac{-2a - b}{3} = -1 + a \Rightarrow 5a + b = 3$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + b}{2} = \frac{1 + b}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 + b}{2} = 1 + a \Rightarrow 2a - b = -1$$

$$\begin{cases} 5a + b = 3 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/7 \\ b = 11/7 \end{cases}$$

Problema 3 (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + x - 12|$ y representarla gráficamente.

Solución:

$$\text{Hacemos } g(x) = x^2 + x - 12 \Rightarrow g'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2:$$

x	y
0	-12
-4	0
3	0
-1/2	-49/4

$g''(x) = 2 \implies g''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 12 & \text{si } x \leq -4 \\ -(x^2 + x - 12) & \text{si } -4 < x \leq 3 \\ x^2 + x - 12 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

f es continua en $x = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} (x^2 + x - 12) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} (-x^2 - x + 12) = 0 \\ f(-4) &= 0 \end{aligned}$$

Y f es continua en $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 - x + 12) = 0$$

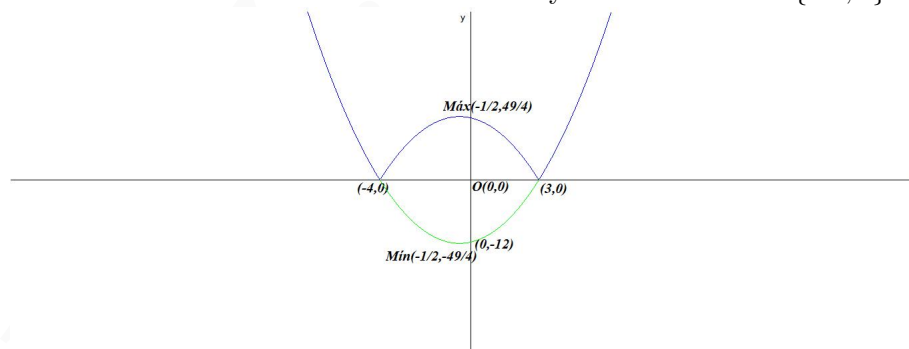
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + x - 12) = 0 \\ f(3) &= 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -4 \\ -2x - 1 & \text{si } -4 < x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -4$: $f'(-4^-) = -7$ y $f'(-4^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -4$.

Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -7$ y $f'(3^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-4, 3\}$.



Problema 4 (1 punto) Dada la función $f(x) = 2ax^2 - bx + c$, encontrar los valores de a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 4)$. Decidir de que extremo se trata.

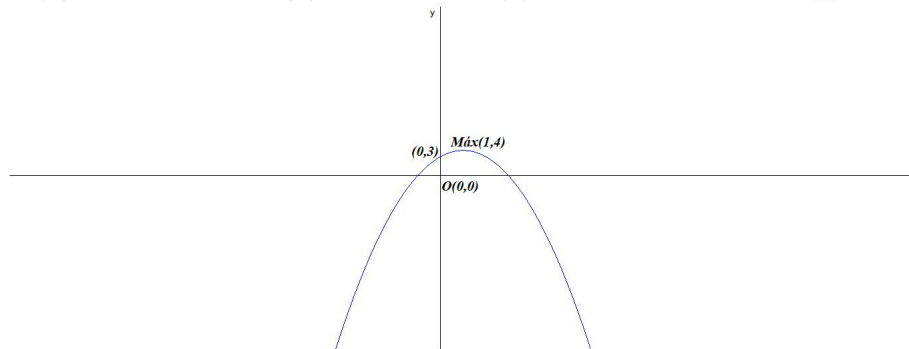
Solución:

$$f(x) = 2ax^2 - bx + c \implies f'(x) = 4ax - b$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \implies c = 3 \\ f(1) = 4 \implies 2a - b + c = 4 \\ f'(1) = 0 \implies 4a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/2 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = -2x + 2$ y $f''(x) = -2 \implies f''(1) = -2 < 0$ luego en $x = 1$ hay un máximo.



Problema 5 (2 puntos) Un número más el cuadrado de otro número suman 108. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Solución:

$$y + x^2 = 108 \implies y = 108 - x^2$$

$$P(x, y) = xy \implies P(x) = x(108 - x^2) = -x^3 + 108x$$

$$P'(x) = -3x^2 + 108 = 0 \implies x = 6, \text{ la solución negativa es irrelevante.}$$

$$P''(x) = -6x \implies P''(6) = -36 < 0 \implies x = 6 \text{ es un máximo relativo.}$$

Los números pedidos son $x = 6$ e $y = 108 - 36 = 72$.

El producto máximo sería $P(6) = -6^3 + 108 \cdot 6 = 432$