Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2021

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-5,0)$, $B(0,10)$ y $C(5,0)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

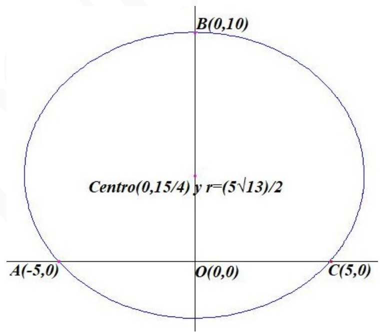
$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5m+p=-25 \\ 10n+p=-100 \\ 5m+p=-25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ n=-15/2 \\ p=-25 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-\frac{15}{2}y-25=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=0 \Longrightarrow a=0 \\ n=-2b=-\dfrac{15}{2} \Longrightarrow b=\dfrac{15}{4} \\ p=-25=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\dfrac{5\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(0,\frac{15}{4}\right),\quad r=\frac{5\sqrt{13}}{2}$$



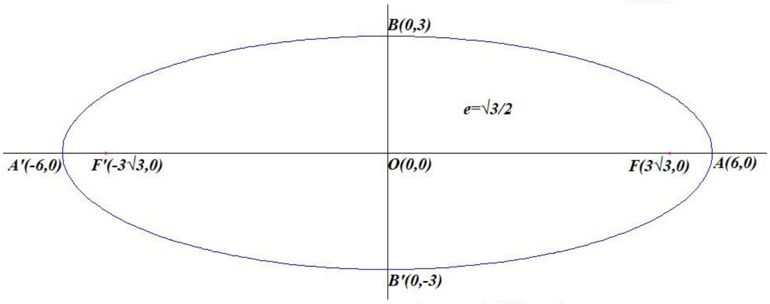
Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen de coordenadas. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=36 \Longrightarrow a=6,\quad b^2=9 \Longrightarrow b=3$$

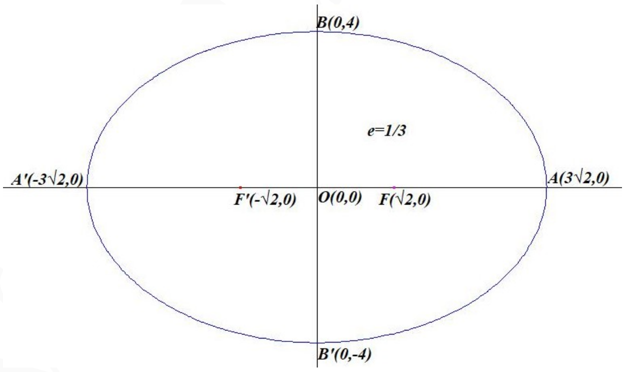
$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=3\sqrt{3}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Eje Mayor= $2a = 12$
Eje Menor= $2b = 6$
Distancia Focal= $2c = 6\sqrt{3}$
Excentricidad= $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Vértices: $A(6,0)$, $A'(-6,0)$, $B(0,3)$, $B(0,-3)$
Focos: $F\left(3\sqrt{3},0\right)$, $F'\left(-3\sqrt{3},0\right)$
Ecuación general: $x^2 + 4y^2 = 36$



Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 8 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{3}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:



$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Longrightarrow a = 3c$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 9c^2 = 16 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{2}$$
$$a = 3c = 3\sqrt{2}$$

Eje Mayor= $2a = 6\sqrt{2}$
Eje Menor= $2b = 8$
Distancia Focal= $2c = 2\sqrt{2}$
Excentricidad= $e = \dfrac{1}{3}$

Vértices: $A\left(3\sqrt{2},0\right)$, $A'\left(-3\sqrt{2},0\right)$, $B(0,4)$, $B'(0,-4)$
Focos: $F\left(\sqrt{2},0\right)$, $F'\left(-\sqrt{2},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$$

Ecuación general: $8x^2+9y^2=144$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r:\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}$$

que se encuentran a una distancia 7 del punto $P(2,3)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 7:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=49$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en paramétricas: $r:\left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=-1+\lambda \end{array}\right.$
y sustituimos en la circunferencia:

$(-2\lambda-2)^2+(-1+\lambda-3)^2=49\Longrightarrow 5\lambda^2-44=0\Longrightarrow \lambda_1=-2,408318915,\ \ \lambda_2=2,408318915$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=-2,408318915\Longrightarrow P_1(4,816637830;-3,408318914) \\ \lambda_2=2,408318915\Longrightarrow P_2(-4,816637830;1,408318915) \end{array}\right.$$

Problema 5 Un jardinero quiere hacer figuras geométricas para rellenarlas de flores de distintos colores. Para los tulipanes ha clavado dos palos en el suelo, ha atado a cada uno de ellos el extremo de una cuerda. Tensando la cuerda con otro palo y, utilizándolo como un lápiz, lo ha utilizado para pintar en el suelo la figura deseada. La cuerda mide 40 m, medida entre los dos nudos. Podemos suponer que los dos palos clavados en el suelo están en los puntos $(10,0)$ y $(0,10)$. Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x=15$

Solución:

a) Se trata de una elipse por definición.

b) Sea $P(x,y)$ un punto de esa elipse, sean $F(10,0)$ y $F'(0,10)$ sus focos, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{FP}| + |\overrightarrow{F'P}| = 40 \Longrightarrow \sqrt{(x-10)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-10)^2} = 40$$

$$(x-10)^2 + y^2 = (40 - \sqrt{x^2+(y-10)^2})^2 \Longrightarrow$$

$$x - y + 80 = 4\sqrt{(x^2+(y-10)^2} \Longrightarrow$$

$$15x^2 + 15y^2 + 2xy - 160x - 160y - 4800 = 0$$

c) Si $x = 15 \Longrightarrow 3y^2 - 26y - 765 = 0 \Longrightarrow y_1 = -12,21289819$ e $y_2 = 20,87956486$. Los puntos en los que tenemos que calcular las tangentes son $Q(15;20,87956486)$ y $H(15;-12,21289819)$. Calculamos la derivada de la función:

$$30xdx + 30ydy + 2ydx + 2xdy - 160dx - 160dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(30x + 2y - 160)dx + (30y + 2x - 160)dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(30y + 2x - 160)dy = -(30x + 2y - 160)dx \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{30x + 2y - 160}{30y + 2x - 160}$$

La pendiente m_1 de la recta pendiente en $Q(15;20,87956486)$ es:

$$m_1 = -\frac{30 \cdot 15 + 2 \cdot 20,87956486 - 160}{30 \cdot 20,87956486 + 2 \cdot 15 - 160} = -0,6683478131$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y - 20,87956486 = -0,6683478131(x - 15)$$

La pendiente m_2 de la recta pendiente en $H(15;-12,21289819)$ es:

$$m_2 = -\frac{30 \cdot 15 + 2 \cdot (-12,21289819) - 160}{30 \cdot (-12,21289819) + 2 \cdot 15 - 160} = 0,5350144799$$

La ecuación de la recta tangente en este punto es:

$$y + 12,21289819 = 0,5350144799(x - 15)$$