Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato CN
Marzo 2022

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-1}-\sqrt{2x^2-x+5}\right)$

b) $\lim_{x\longrightarrow 6}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{7x-1}}{x-6}$

c) $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^4-5x^3+4x^2+2x-2}{x^5-3x^4+4x^3-2x^2+x-1}$

d) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{3\cos x+2xe^x-3}{x\cos x}$

e) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3e^{4x}-x^2+1}{e^{4x}+x+2}$

f) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{5x\cos x+2xe^x}{\cos x-e^x}$

g) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\ln(3x^2+1)}{\ln(x^2+2)}$

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-1}-\sqrt{2x^2-x+5}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim_{x\longrightarrow 6}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{7x-1}}{x-6}=\dfrac{5\sqrt{41}}{82}$

c) $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^4-5x^3+4x^2+2x-2}{x^5-3x^4+4x^3-2x^2+x-1}=-\dfrac{1}{2}$

d) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{3\cos x+2xe^x-3}{x\cos x}=2$

e) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3e^{4x}-x^2+1}{e^{4x}+x+2}=3$

f) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{5x\cos x+2xe^x}{\cos x-e^x}=-7$

g) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\ln(3x^2+1)}{\ln(x^2+2)}=1$

Problema 2 Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{x^3 \sin^3(2x)}{e^{5x} \cos x^2}}$

b) $y = (x^2+2)^{\sin(3x)}$

c) $y = (\arccos x)^{2x+1}$

d) $y = \log_9 \dfrac{3x^2-3}{\sqrt{x^2+3}}$

e) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2+5}{\cos^2(2x)}}$

f) $y = \sec^2(x^3+2)\log_3(x^2-1)$

g) $y = 5^{\arctan(x^2+2)}\tan^2(x-5)$

Solución:

a) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{x^3 \sin^3(2x)}{e^{5x} \cos x^2}} = \dfrac{1}{5}\left(3\ln x + 3\ln\sin(2x) - (5x)\ln e - \ln(\cos x^2)\right) \Longrightarrow$

$$y' = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{x} + 3\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} - 5 - \frac{-2x\sin x^2}{\cos x^2}\right)$$

b) $y = (x^2+2)^{\sin(3x)} \Longrightarrow y' = (x^2+2)^{\sin(3x)}\left(3\cos(3x)\ln(x^2+2) + \sin(3x)\dfrac{2x}{x^2+2}\right)$

c) $y = (\arccos x)^{2x+1} \Longrightarrow y' = (\arccos x)^{2x+1}\left(2\ln(\arccos x) + (2x+1)\dfrac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos x}\right)$

d) $y = \log_9 \dfrac{3x^2-3}{\sqrt{x^2+3}} = \log_9(3x^2-3) - \dfrac{1}{2}\log_9(x^2+3) \Longrightarrow y' = \dfrac{6x}{(3x^2-3)\ln 9} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{(x^2+3)\ln 9}$

e) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2+5}{\cos^2(2x)}} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x^2+5}{\cos^2(2x)}\right)^{-4/5}\left(\dfrac{2x\cos^2(2x) - (x^2+5)(2\cos(2x)(-2\sin(2x))}{\cos^4(2x)}\right)$

f) $y = \sec^2(x^3+2)\log_3(x^2-1) \Longrightarrow y' = 3x^2\sec^2(x^3+2)\tan(x^3+2)\log_3(x^2-1) + \sec^2(x^3+2)\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

g) $y = 5^{\arctan(x^2+2)}\tan^2(x-5) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{1+(x^2+2)^2}5^{\arctan(x^2+2)}\ln 5\tan^2(x-5) + 5^{\arctan(x^2+2)}2\tan(x-5)\dfrac{1}{\cos^2(x-5)}$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-5}{2x-7}$ en el punto $x = 0$.

b) $f(x) = (x^2+1)e^{2x}$ en el punto $x = 0$.

Solución:

a) $b = f(a) \Longrightarrow b = f(0) = \dfrac{5}{7}$ e $y - b = m(x-a)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-7x+5)}{(2x-7)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = \frac{10}{49}$$

Recta Tangente: $y - \dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{49}x$

Recta Normal: $y - \dfrac{5}{7} = -\dfrac{49}{10}x$

b) $b = f(a) \Longrightarrow b = f(0) = 1$ e $y - b = m(x-a)$

$$f'(x) = 2(x^2+x+1)e^{2x} \Longrightarrow m = f'(0) = 2$$

Recta Tangente: $y - 1 = 2x$

Recta Normal: $y - 1 = -\dfrac{1}{2}x$

Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 2xe^{7x^2-5}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{3x^2+7}\,dx$

c) $\displaystyle\int 7x^3\cos(3x^4+1)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3x}{1+x^4}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x^2\cos x-6x^2e^x+3x}{x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^5-5x^4-4\sqrt[5]{x^3}-7x}{x^2}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int 2xe^{7x^2-5}\,dx = \frac{1}{7}e^{7x^2-5} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{3x^2+7}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x^2+7| + C$

c) $\displaystyle\int 7x^3\cos(3x^4+1)\,dx = \frac{7}{12}\sin(3x^4+1) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{3x}{1+x^4}\,dx = \frac{3}{2}\arctan x^2 + C$

e) $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x^2\cos x - 6x^2e^x + 3x}{x^2}\,dx = 5x + 3\sin x - 6e^x + 3\ln|x| + C$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^5 - 5x^4 - 4\sqrt[5]{x^3} - 7x}{x^2}\,dx = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 10x^{-2/5} - 7\ln|x| + C$