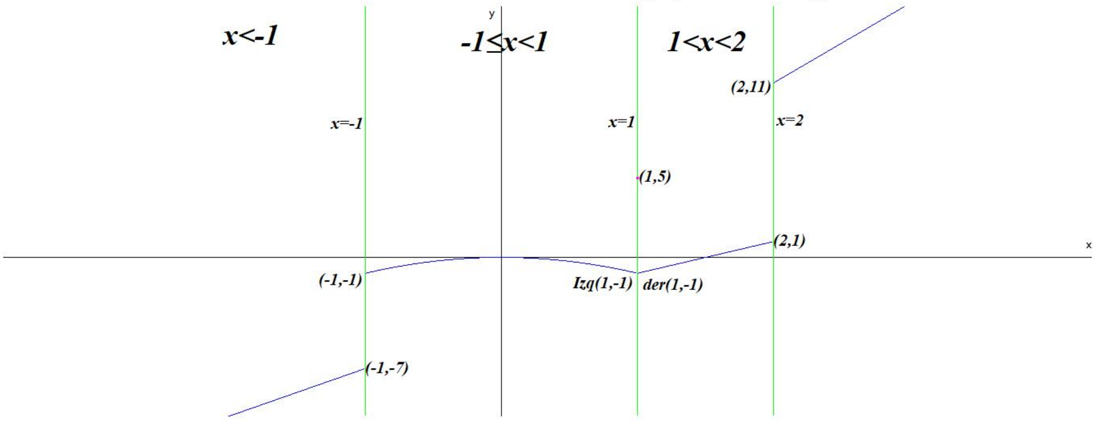
Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CN)
Mayo 2022

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 5x + 1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es discontinua no evitable(salto) , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 2x - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 3bx + 1) = a - 3b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - 2x - a) = b - 2 - a$$

$$a-3b+1=b-2-a \Longrightarrow 2a-4b=-3$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax-3b & \text{si} \quad x<1 \\ 2bx-2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-)=2a-3b;\ \ f'(1^+)=2b-2 \Longrightarrow 2a-3b=2b-2 \Longrightarrow 2a-5b=-2$$

$$\begin{cases} 2a-4b=-3 \\ 2a-5b=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7}{2} \\ b=-1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{7}{2}x^2+3x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ -x^2-2x+\dfrac{7}{2} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} -7x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ -2x-2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c\in[0,2]/f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{-9/2-1}{2}=-\frac{11}{4}$$

Si $c<1$: $\ f'(c)=-7c+3=-\dfrac{11}{4} \Longrightarrow c=\dfrac{23}{28}$ solución válida.

Si $c\geq 1$: $\ f'(c)=-2c-2=-\dfrac{11}{4} \Longrightarrow c=\dfrac{3}{8}$ solución no válida.

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3a}{2} & \text{si} & x<-1 \\ bx-1 & \text{si} & -1\leq x<1 \\ \dfrac{ax+b}{3} & \text{si} & x\geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x=-1$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{x-3a}{2}=\frac{-1-3a}{2} \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^+}(bx-1)=-b-1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-1-3a}{2}=-b-1 \Longrightarrow 3a-2b=1$$

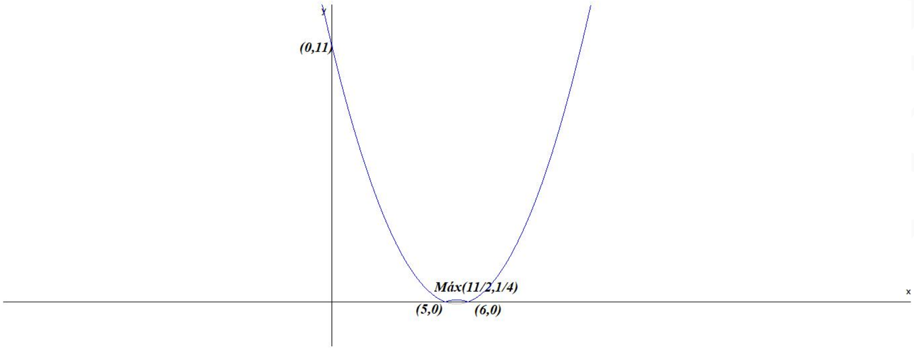
Continuidad en $x=1$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(bx-1)=b-1 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{ax+b}{3}=\frac{a+b}{3} \end{cases} \Longrightarrow \frac{a+b}{3}=b-1 \Longrightarrow a-2b=-3$$

$$\begin{cases} 3a-2b=1 \\ a-2b=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5/2 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 11x + 30|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 - 11x + 30 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 11 = 0 \Longrightarrow x = 11/2$:

x	y
0	30
5	0
6	0
$11/2$	$-1/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{11}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{11}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 11x + 30 & \text{si} \quad x \le 5 \\ -(x^2 - 11x + 30) & \text{si} \quad 5 < x \le 6 \\ x^2 - 11x + 30 & \text{si} \quad 6 \le x \end{cases}$$

f es continua en $x = 5$:

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (x^2 - 11x + 30) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (-x^2 + 11x - 30) = 0$$

$$f(5) = 0$$

y f es continua en $x = 6$

$$\lim_{x \longrightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 6^-} (-x^2 + 11x - 30) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 6^+} (x^2 - 11x + 30) = 0$$

$$f(6) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 11 & \text{si} \quad x \le 5 \\ -2x + 11 & \text{si} \quad 5 < x \le 6 \\ 2x - 11 & \text{si} \quad 6 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -1$ y $f'(5^+) = 1$, luego no es derivable en $x = 5$.
Derivabilidad en $x = 6$: $f'(6^-) = -1$ y $f'(6^+) = 1$, luego no es derivable en $x = 6$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{5, 6\}$.

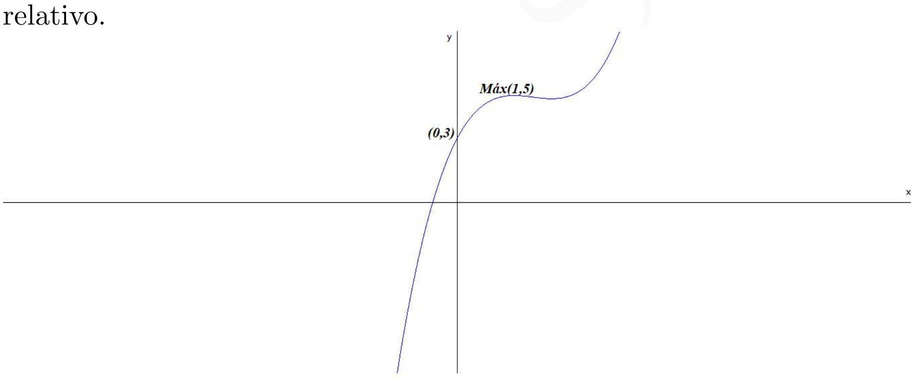
Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 5)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \Longrightarrow c = 3 \\ f(1) = 5 \Longrightarrow -2a + b + c + 1 = 5 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow -4a + b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ y $f''(x) = 6x - 8 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 1$ es un máximo relativo.



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3e^x + 2x - a & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Calcular a de forma que la función sea continua en $x = 0$ y la continuidad en $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(3e^x + 2x - a) = 3 - a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x+3}{x+1} = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow 3 - a = 3 \Longrightarrow a = 0$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es continua, luego f es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = 0$.

b) Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3e^x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ \\ -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = 5 \neq f'(0^+) = -2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.