

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CN)
Mayo 2022

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 2x^2 - 18 = 0 \implies (3, 0), (-3, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 18 \implies (0, 18)$.
- c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	+	-	+	-	+
- d) $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- e) Asíntotas:

• **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = \left[\frac{-16}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = \left[\frac{-16}{0^+} \right] = -\infty$$

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = \left[\frac{-16}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = \left[\frac{-16}{0^-} \right] = +\infty$$

• **Horizontales:** $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} = 2$$

• **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \frac{32x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 18)$.

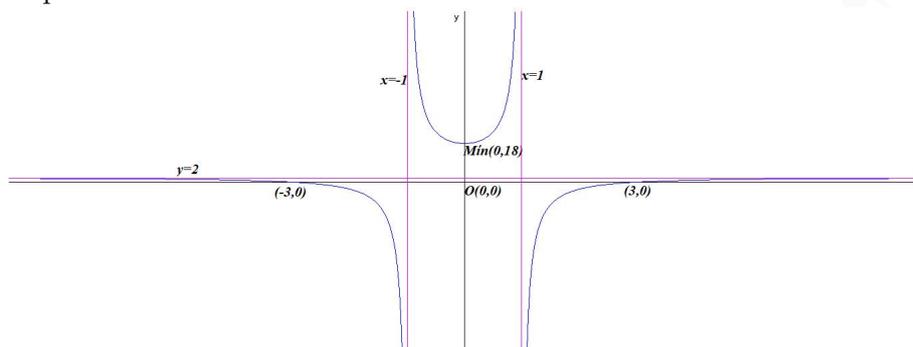
g) $f''(x) = -\frac{32(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \implies 3x^2 + 1 = 0$ No tiene solución y, por tanto, no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪	convexa ∩

Convexa : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$:

Como $m = f'(3) = 3/2$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y = \frac{3}{2}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal : } y = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

Como $f(3) = 0$ las rectas pasan por el punto $(3, 0)$.

