Examen de Matemáticas 1ºBachillerato(CS)

Abril 2021

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{-2x}{x^2+3}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su simetría.

b) (2 puntos) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

a) Puntos de Corte

- ☛ Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ con OX.
- ☛ Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

$f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ la función es impar.

b) $f'(x) = \dfrac{2(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

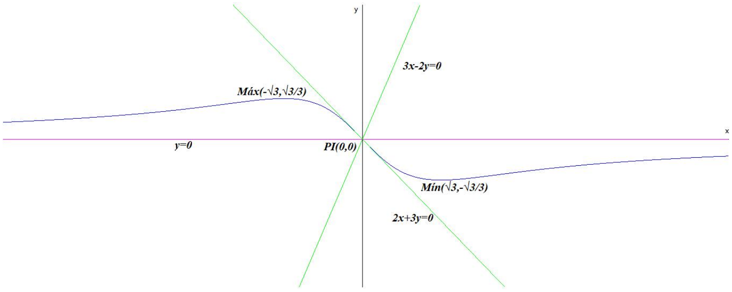
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, creciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ con un máximo en $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y un mínimo en $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:
Como $m = f'(0) = -2/3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y = -\frac{2}{3}x$$

$$\text{Recta Normal}: \; y = \frac{3}{2}x$$

Como $f(0) = 0$ las rectas pasan por el punto $(0,0)$.



Problema 2 (2 puntos) Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ bx + a & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \frac{2x-2b}{2} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{ax+b}{2} = \dfrac{-a+b}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx+a) = -b+a \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-a+b}{2} = -b+a \Longrightarrow a - b = 0$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (bx+a) = b+a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2x-2b}{2} = \dfrac{2-2b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{2-2b}{2} = b+a \Longrightarrow a + 2b = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = 0 \\ a + 2b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = 1/3 \end{array} \right.$$

Problema 3 (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3/2$:

x	y
0	10
-5	0
2	0
$-3/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} \quad -5 < x \le 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

f es continua en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

Y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

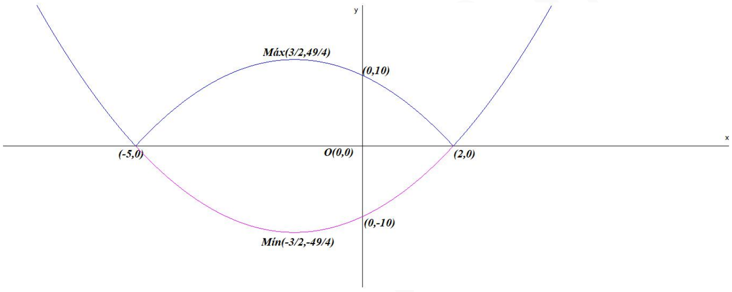
$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 3 & \text{si} & x \le -5 \\ -2x - 3 & \text{si} & -5 < x \le 2 \\ 2x + 3 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -5$: $f'(-5^-) = -7$ y $f'(-5^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -5$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -7$ y $f'(2^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$.



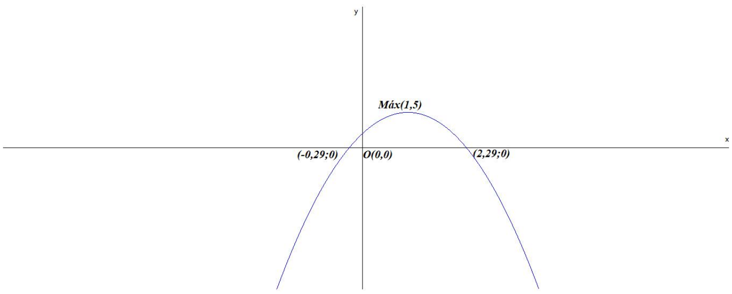
Problema 4 (1 punto) Dada la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 5)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(1) = 5 \Longrightarrow a - 2b + c = 5 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a - 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = -3x^2 + 6x + 2$
$f'(x) = -6x + 6$ y $f''(x) = -6 \Longrightarrow f''(1) = -6 < 0$ luego en $x = 1$ hay un máximo.



Problema 5 (2 puntos) Se trata de construir una caja (prisma rectangular) de base rectangular, con la misma profundidad en toda ella. El largo de la caja queremos que sea el doble del ancho y debe de contener 8 m^3 de líquido, cuando está llena hasta el borde. Calcular las dimensiones que debe de tener si queremos gastarnos la menor cantidad de dinero en su construcción con latón. Calcular cuánto gastaremos si el m^2 del latón que cuesta 11 euros.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} V = 8 = 2x^2y \Longrightarrow y = \dfrac{8}{2x^2} = \dfrac{4}{x^2} \\ \\ S(x,y) = 2x^2 + 4xy + 2xy = 2x^2 + 6xy \end{array}\right. \Longrightarrow S(x) = 2x^2 + \frac{24}{x}$$

$$S(x) = \frac{2x^3+24}{x} \Longrightarrow S'(x) = \frac{4(x^3-6)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^3 - 6 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{6} = 1,82 \Longrightarrow y = \frac{4}{1,82^2} = 1,21$$

	$(0;1,82)$	$(1,82;+\infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego en $x = 1,82$ hay un mínimo. Las dimensiones serían 1,82 m de ancho, 3,64 m de largo y 1,21 m de alto.

El área que tenemos que alicatar es $s(1,82) = \dfrac{2\cdot 1,82^3 + 24}{1,82} = 22,791$ m^2 luego el gasto sería: $22,791 \cdot 11 = 250,7$ euros.